理想树

与《初中必刷题》配套使用，把知识变成常识

狂K重点

知识·格　考题·律　创新·法

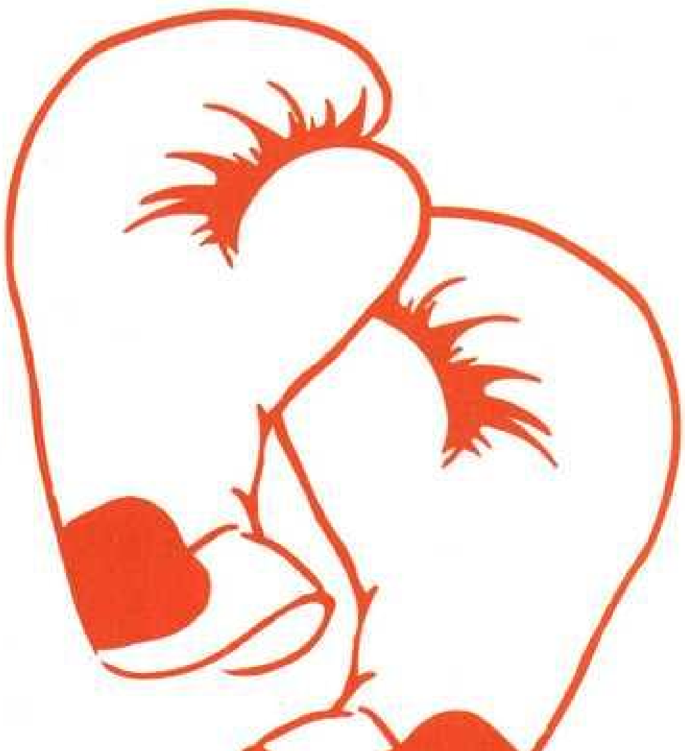
数学

九年级上册 BS

- 不管它起起伏伏
- 让今天把昨天变特殊
- 因为我们努力不服输

与《初中必刷题》配套使用，把知识变成常识

狂K重点



新学期立个新目标

□

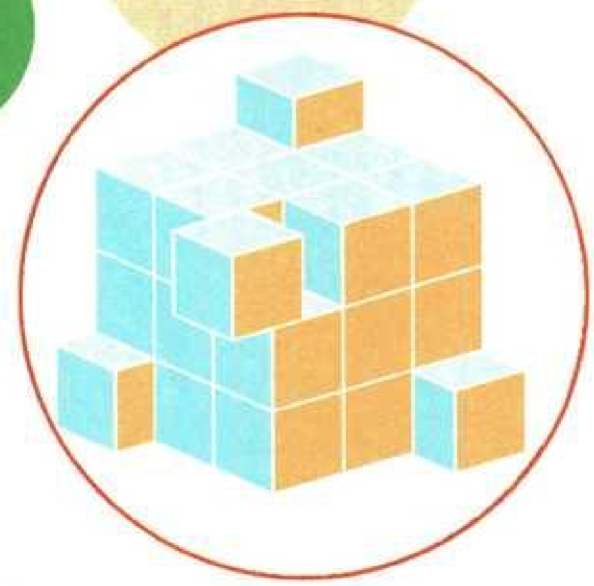
□

□

数学

九年级上册 BS

·目录·



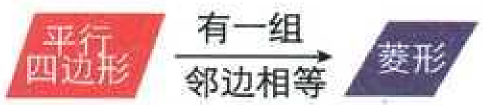
第一章 特殊平行四边形

1 菱形的性质与判定

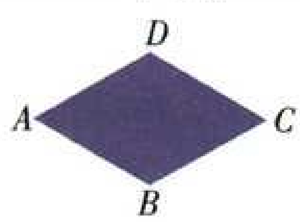
知识过关 全理解

知识点1 菱形的定义

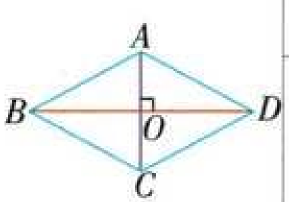
1. 有一组邻边[1]______的平行四边形叫做菱形,菱形是特殊的平行四边形. ▶注意1



2. 数学语言描述:如图,在▱$ABCD$中,若$AB=AD$,则▱$ABCD$是菱形.



知识点2 菱形的性质 ▶拓展1 重难点

图示		性质	数学语言描述
	边	对边[2]______	$AB/\!/CD,AD/\!/BC$
	边	四条边都[3]______	$AB=BC=CD=DA$
	角	对角[4]______	$\angle ABC=\angle ADC,\angle BCD=\angle DAB$
	对角线	对角线[5]______	$AC\perp BD,OA=OC,OB=OD$
	对角线	每条对角线平分一组对角	$\angle BAC=\angle DAC=\angle BCA=\angle DCA$,$\angle ABD=\angle CBD=\angle ADB=\angle CDB$
	对称性	轴对称图形,对称轴是[6]______所在的直线 ▶方法	
	对称性	中心对称图形,对称中心是[7]______的交点	

知识点3 菱形的判定 ▶注意2 重点

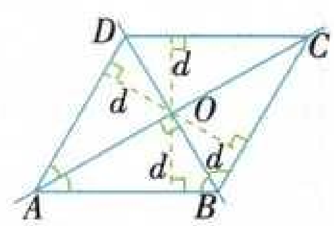
菱形的判定
- (1) 根据定义 — [8]______的平行四边形是菱形
- (2) 根据对角线 — 对角线[9]______的平行四边形是菱形
- (3) 根据边 — 四边[10]______的平行四边形是菱形

【拓展】(1)对角线互相垂直平分的四边形是菱形.
(2)对角线平分一组内角的平行四边形是菱形.

敲黑板 划重点

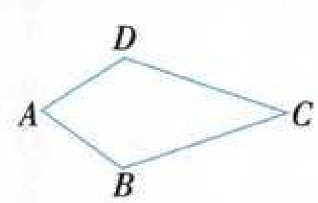
注意 1 菱形必须具备两个条件:(1)是平行四边形;(2)有一组邻边相等. 二者缺一不可.

拓展 1 菱形的中心到各边的距离均相等.

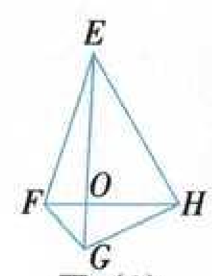


方法 由对称性知,菱形的对角线将菱形分成四个全等的直角三角形. 与菱形相关的计算可以转化到直角三角形中.

注意 2 菱形判定的易错情况
(1)一组或两组邻边相等的四边形不一定是菱形,如图(1).
(2)对角线互相垂直的四边形不一定是菱形,如图(2).

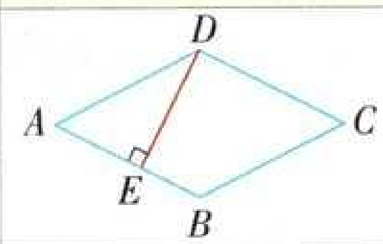
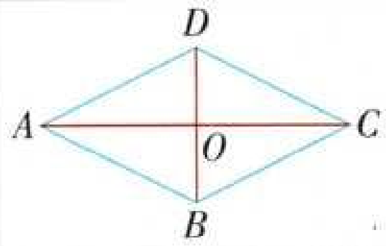


图(1)



图(2)

知识点4　菱形面积的计算　重点

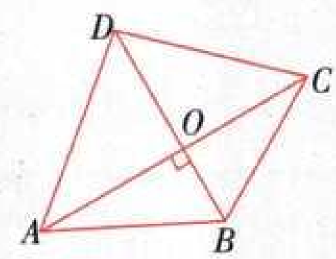
计算方法	符号表示		主要依据
菱形的面积= 11______		$S=AB\cdot DE$	菱形是特殊的平行四边形
菱形的面积=两条对角线乘积的一半		$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD$ ▶拓展2	$S_{菱形ABCD}=4S_{\triangle AOB}=4\times\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}AC\cdot BD$

答案

1相等　2平行　3相等　4相等　5互相垂直平分　6对角线　7两条对角线　8有一组邻边相等　9互相垂直　10相等　11底×高

敲黑板　划重点

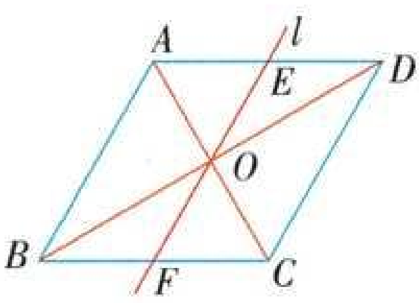
拓展 2　对角线互相垂直的任意四边形的面积都等于两条对角线长度乘积的一半.



题型过关　全提升

题型1　菱形性质的应用

例题1　如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$\angle ABC=60°$，对角线 AC,BD 相交于点 O，将对角线 AC 所在的直线绕点 O 顺时针旋转 α $(0°<\alpha<90°)$ 后得直线 l，直线 l 与 AD,BC 两边分别相交于点 E 和点 F.

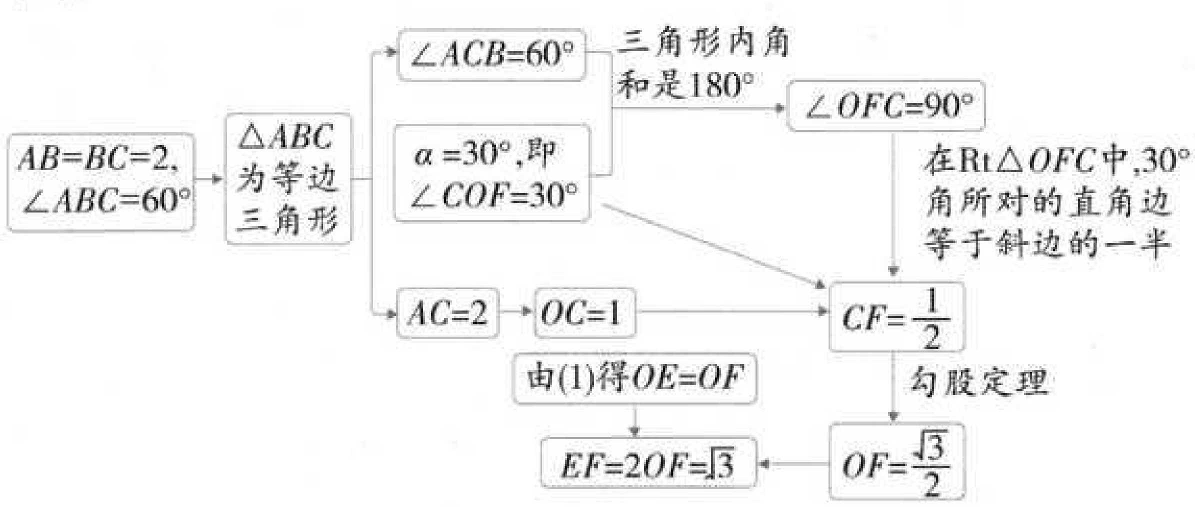


(1)求证：$\triangle AOE\cong\triangle COF$；(2)当 $\alpha=30°$时，求线段 EF 的长度.

【思路分析】

(1)

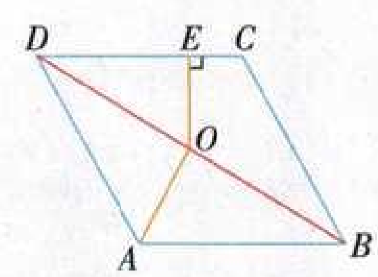
(2)



(1)【证明】∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形，∴ $AO=CO$，$AD/\!/BC$，

变式练　刷重点

变式练1　如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$\angle BAD=120°$，O 是对角线 BD 的中点，过点 O 作 $OE\perp CD$ 于点 E，连接 OA，则四边形 $AOED$ 的周长为(　　)



A. $9+2\sqrt{3}$　　B. $9+\sqrt{3}$

C. $7+2\sqrt{3}$　　D. 8

答案见 P5

$\therefore \angle OAE=\angle OCF$.

又$\because \angle AOE=\angle COF$,$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$(ASA).

(2)【解】$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,$\therefore AB=BC=2$. 又$\because \angle ABC=60°$,$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形,$\therefore AC=2$,$\angle ACB=60°$,$\therefore OC=1$. $\because \alpha=30°$,即$\angle COF=30°$,$\therefore \angle OFC=90°$. 在 Rt$\triangle OFC$ 中,$CF=\frac{1}{2}OC=\frac{1}{2}$,由勾股定理得 $OF=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又$\because \triangle AOE\cong\triangle COF$,$\therefore OE=OF$,$\therefore EF=2OF=\sqrt{3}$.

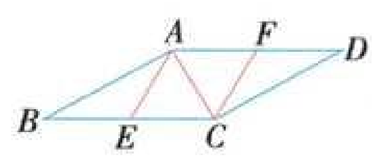
题型 2 菱形性质与判定的综合应用

通常解决菱形性质与判定的综合题时,首先应判定相应的四边形是菱形,然后再根据菱形的性质进行下一步的证明.

例题 2 如图,已知点 E,F 分别是▱$ABCD$ 的边 BC,AD 的中点,且$\angle BAC=90°$.

(1)求证:四边形 $AECF$ 是菱形;

(2)若$\angle B=30°$,$BC=10$,求菱形 $AECF$ 的面积.

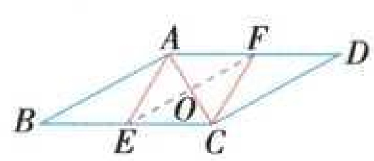


【思路分析】

(1) E,F分别是BC,AD的中点;▱$ABCD$ → $AD\underline{\parallel}BC$ → $AF\underline{\parallel}CE$, $AF\underline{\parallel}BE$ → 四边形$AECF$和四边形$ABEF$都是平行四边形 $\xrightarrow{\angle BAC=90°}$ $EF\perp AC$ → 得证

(2) $\angle BAC=90°$, $\angle B=30°$, $BC=10$ → $AC=\frac{1}{2}BC$ → $OC=\frac{1}{2}AC$;
$EC=\frac{1}{2}BC$, $OC=\frac{1}{2}AC$ → 在Rt$\triangle OEC$中,$OE^2=CE^2-OC^2$ → $EF=2OE$;
$AC=\frac{1}{2}BC$, $EF=2OE$ → $S_{菱形AECF}=\frac{1}{2}AC\cdot EF$

(1)【证明】如图,连接 EF,交 AC 于点 O.



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD=BC$,$AD\parallel BC$.

又$\because$ 点 E,F 分别是▱$ABCD$ 的边 BC,AD 的中点,$\therefore BE=AF=EC$,

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 和四边形 $AECF$ 都是平行四边形,$\therefore AB\parallel EF$.

又$\because \angle BAC=90°$,$\therefore \angle COE=90°$,$\therefore AC\perp EF$,$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形.

(2)【解】由$\angle B=30°$,$\angle BAC=90°$,易知$\angle ACE=60°$.

由(1)知,四边形 $AECF$ 是菱形,$AC\perp EF$ 于点 O,$\therefore AE=EC$.

在$\triangle AEC$ 中,$AE=EC$,$\angle ACE=60°$,

$\therefore \triangle AEC$ 是等边三角形,$\therefore AC=EC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times10=5$,$OC=\frac{1}{2}AC=\frac{5}{2}$.

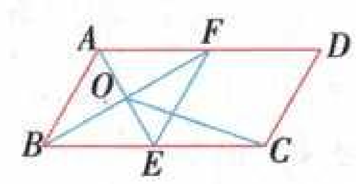
在 Rt$\triangle OEC$ 中,由勾股定理,得 $OE=\sqrt{EC^2-OC^2}=\sqrt{5^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$,

变式练 刷重点

变式练 2 如图,在▱$ABCD$ 中,$BC=2AB$,E,F 分别是 BC,AD 的中点,AE,BF 交于点 O,连接 EF,OC.

(1)求证:四边形 $ABEF$ 是菱形;

(2)若 $BC=8$,$\angle ABC=60°$,求 OC 的长.



答案见 P5

$\therefore EF=2OE=2\times\frac{5\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$,

$\therefore$ 菱形 $AECF$ 的面积为$\frac{1}{2}AC\cdot EF=\frac{1}{2}\times5\times5\sqrt{3}=\frac{25\sqrt{3}}{2}$. ▶注意 3

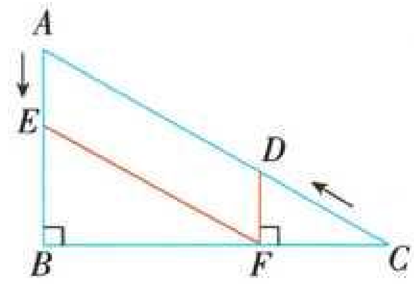
题型 3 菱形中的动点问题

解决动点问题的思路：

1. 动中求静：在运动变化中探索问题的不变性.

2. 动静互化：抓住“静”的瞬间，找出导致图形发生改变的特殊时刻，同时在变化过程中寻找不变性及变化规律.

例题 3 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，$\angle C=30°$，点 D 从 C 点出发沿着 CA 方向以每秒 2 个单位的速度向终点 A 运动，同时点 E 从点 A 出发沿着 AB 方向以每秒 1 个单位的速度向终点 B 运动. 设点 D,E 的运动时间为 t 秒，过点 D 作 $DF\perp BC$ 于 F.



(1) 求证：$AE=DF$.

(2) 连接 EF，若 $BC=5\sqrt{3}$，则是否存在 t，使得四边形 $AEFD$ 为菱形？若存在，求出 t 的值；若不存在，请说明理由.

【思路分析】

(1) $\angle DFC=90°,\angle C=30°,CD=2t,AE=t$ → $DF=\frac{1}{2}CD=t$ → $AE=DF$

直角三角形中，30° 角所对的直角边等于斜边的一半 → $DF=\frac{1}{2}CD=t$

(2) $AB\perp BC,DF\perp BC$ → $AE/\!/DF$

$AE=DF$，$AE/\!/DF$ → 四边形$AEFD$为平行四边形

四边形$AEFD$为平行四边形，$AE=AD$ → 求t的值

(1)【证明】$\because$ 在 $\triangle DFC$ 中，$\angle DFC=90°$，$\angle C=30°$，$DC=2t$，$\therefore DF=t$. 又 $\because AE=t$，$\therefore AE=DF$.

(2)【解】存在.

$\because AB\perp BC$，$DF\perp BC$，$\therefore AE/\!/DF$. 又 $\because AE=DF$，$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 为平行四边形.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，设 $AB=x$，则有 $AC=2x$，由勾股定理得 $AB^2+BC^2=AC^2$，即 $x^2+(5\sqrt{3})^2=(2x)^2$，解得 $x=5$（负值已舍去），即 $AB=5$，$AC=2AB=10$，

$\therefore AD=AC-DC=10-2t$.

若使平行四边形 $AEFD$ 为菱形，则需 $AE=AD$，即 $t=10-2t$，解得 $t=\frac{10}{3}$，

即当 $t=\frac{10}{3}$时，四边形 $AEFD$ 为菱形.

变式练 刷重点

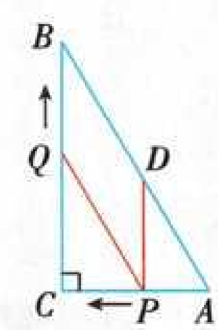
注意 3 用对角线计算菱形面积时不要忘记乘$\frac{1}{2}$.

变式练 3 如图，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=6$，$\angle B=30°$，动点 P 从点 A 开始沿边 AC 向点 C 以每秒 1 个单位长度的速度运动，同时动点 Q 从点 C 开始沿边 CB 向点 B 以每秒$\sqrt{3}$个单位长度的速度运动，当其中一点到达端点时，另一点也随之停止运动. 过点 P 作 $PD/\!/BC$，交 AB 于点 D，连接 PQ. 设运动时间为 t 秒（$t\geqslant0$）.

(1) 用含 t 的代数式分别表示 QB，PD，BD 的长度：$QB=$________，$PD=$________，$BD=$________.

(2) 当 t 取何值时，四边形 $PDBQ$ 是平行四边形？

(3) 是否存在 t，使四边形 $PDBQ$ 为菱形？若存在，求出 t 的值；若不存在，请说明理由，并探究如何改变点 Q 的速度（匀速运动），能使四边形 $PDBQ$ 在某一时刻成为菱形.



答案见 P5

变式练答案

1. B 【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形，∴ $AD=AB=4$. ∵ $\angle BAD=120°$，∴ $\angle ADB=\angle CDB=30°$. ∵ O 是对角线 BD 的中点，∴ $AO\perp BD$. 在 $Rt\triangle AOD$ 中，$AO=\frac{1}{2}AD=2$，∴ $OD=2\sqrt{3}$. ∵ $OE\perp CD$，∴ $\angle DEO=90°$. 在 $Rt\triangle DOE$ 中，$OE=\frac{1}{2}OD=\sqrt{3}$，∴ $DE=3$，∴ 四边形 $AOED$ 的周长为 $4+2+\sqrt{3}+3=9+\sqrt{3}$. 故选 B.

2. (1)【证明】由题意知 $AF/\!/BE$，由 E，F 分别是 BC，AD 的中点，知 $AF=BE$，故四边形 $ABEF$ 是平行四边形.
又∵ $BC=2AB$，∴ $AB=BE$，∴ 四边形 $ABEF$ 是菱形.
(2)【解】由 $\angle ABC=60°$，知 $\triangle ABE$ 是等边三角形，故 $OE=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{4}BC=2$. 过点 O 作 $OG\perp BC$ 于点 G.
在 $Rt\triangle BOE$ 中，利用勾股定理及等面积法可得 $OG=\sqrt{3}$.
在 $Rt\triangle GOE$ 中，由勾股定理得 $GE=1$，∴ $GC=5$.
在 $Rt\triangle GOC$ 中，由勾股定理得 $OC=2\sqrt{7}$.

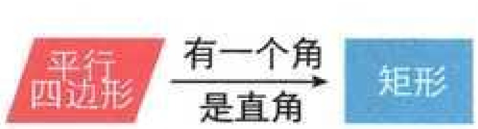
3. 【解】(1)∵ $\angle C=90°$，$AC=6$，$\angle B=30°$，∴ $AB=12$，∴ $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=6\sqrt{3}$，∴ $QB=6\sqrt{3}-\sqrt{3}t$.
∵ $PD/\!/BC$，∴ $\angle ADP=30°$，$\angle DPA=90°$，∴ $AD=2AP=2t$，∴ $PD=\sqrt{AD^2-AP^2}=\sqrt{3}t$，$BD=12-2t$. 故答案为 $6\sqrt{3}-\sqrt{3}t$，$\sqrt{3}t$，$12-2t$.
(2)若四边形 $PDBQ$ 是平行四边形，则有 $QB=DP$，即 $6\sqrt{3}-\sqrt{3}t=\sqrt{3}t$，解得 $t=3$. 故 $t=3$ 时，四边形 $PDBQ$ 是平行四边形.
(3)不存在. 理由如下：∵ $t=3$ 时，四边形 $PDBQ$ 是平行四边形，此时 $BD=12-2t=6\neq DP$，
∴ 不存在 t，使四边形 $PDBQ$ 为菱形.
设点 Q 的速度为每秒 v 个单位长度，则 $BQ=6\sqrt{3}-vt$. 要使四边形 $PDBQ$ 为菱形，则 $PD=BD=BQ$.
当 $PD=BD$ 时，$\sqrt{3}t=12-2t$，解得 $t=24-12\sqrt{3}$，
当 $PD=BQ$，$t=24-12\sqrt{3}$ 时，$\sqrt{3}\times(24-12\sqrt{3})=6\sqrt{3}-v\cdot(24-12\sqrt{3})$，解得 $v=\frac{3}{2}$，
∴ 当点 Q 的速度为每秒 $\frac{3}{2}$ 个单位长度时，在某一时刻可以使四边形 $PDBQ$ 是菱形.

2 矩形的性质与判定

知识过关 全理解

知识点 1 矩形的定义

1. 有一个角是 1 ______ 的平行四边形叫做矩形，矩形是特殊的平行四边形. ▶注意 1



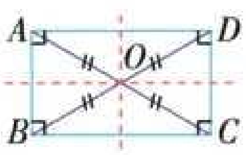
2. 数学语言描述：如图，在▱$ABCD$ 中，若 $AB\perp AD$，则▱$ABCD$ 是矩形.

敲黑板 划重点

注意 1 **矩形必须具备两个条件**

(1)是平行四边形；(2)有一个角是直角. 二者缺一不可.

知识点 2　矩形的性质 ▶方法 1　重难点

图示	性质		数学语言描述
	边	对边[2]____	$AB/\!/CD, AD/\!/BC$
		对边[3]____	$AB=CD, AD=BC$
	角	四个角都是[4]____	$\angle ABC=\angle BCD=\angle CDA=\angle DAB=90°$
	对角线	对角线[5]____ ▶拓展 1	$AC=BD, OA=OB=OC=OD$
	对称性	轴对称图形,[6]______是它的对称轴,共有两条	
		中心对称图形,对称中心是[7]______	

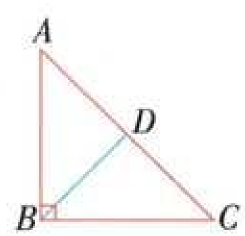
知识点 3　直角三角形的性质定理　重点

1. 定理

直角三角形斜边上的中线等于斜边的[8]____.

2. 数学语言描述

在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ABC=90°$,D 为 AC 的中点,则 $BD=\frac{1}{2}AC$.



3. 定理的逆命题

如果一个三角形一边上的中线等于这条边的一半,那么这个三角形是直角三角形. ▶方法 2

在$\triangle ABC$ 中,若 $BD=\frac{1}{2}AC$,且 D 为 AC 的中点,则$\triangle ABC$ 为直角三角形.

知识点 4　矩形的判定　重点

矩形的判定
- (1) 根据定义 — 有一个角是[9]______的平行四边形是矩形 ▶注意2
- (2) 根据对角线 — 对角线[10]______的平行四边形是矩形 ▶拓展2
- (3) 根据角 — 有三个角是[11]______的四边形是矩形

答案

[1]直角　[2]平行　[3]相等　[4]直角　[5]相等且互相平分　[6]过对边中点的直线　[7]对角线的交点　[8]一半　[9]直角　[10]相等　[11]直角

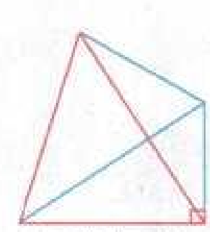
敲黑板　划重点

方法 1　矩形的性质是证明线段相等、角相等、线段平行或垂直的重要依据.

拓展 1　(1)矩形被任意一条对角线分成两个全等的直角三角形;
(2)矩形被两条对角线分成两对全等的等腰三角形且四个小三角形面积相等.

方法 2　逆命题可以作为规律应用,但在书写推理过程时,不能直接应用,需要运用"等边对等角"和"三角形的内角和等于 180°"来证明.

注意 2　有一个角是直角且对角线相等的任意四边形,不一定是矩形,如图.



拓展 2　对角线相等,且互相平分的四边形是矩形.