



理想树

与《初中必刷题》配套使用，把知识变成常识

狂×重点



知识·格



考题·律



创新·法

数学

九年级上册 RJ



- 不管它起起伏伏
- 让今天把昨天变特殊
- 因为我们努力不服输

与《初中必刷题》配套使用，把知识变成常识

狂★重点

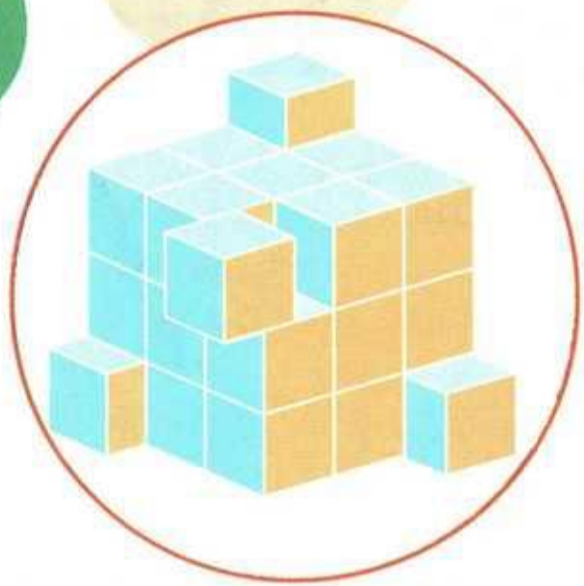


新学期立个新目标

数 学

九年级上册 RJ

· 目录 ·



第二十一章 一元二次方程 1

21.1 一元二次方程 1

21.2 解一元二次方程 4

21.3 实际问题与一元二次方程 9

第二十二章 二次函数 15

22.1 二次函数的图象和性质 15

22.2 二次函数与一元二次方程 23

22.3 实际问题与二次函数 28

第二十三章 旋转 33

23.1 图形的旋转 33

23.2 中心对称+

23.3 课题学习 图案设计 37

第二十四章 圆 42

24.1 圆的有关性质 42

24.2 点和圆、直线和圆的位置关系 ... 48

24.3 正多边形和圆 55

24.4 弧长和扇形面积 59

第二十五章 概率初步 62

25.1 随机事件与概率 62

25.2 用列举法求概率+

25.3 用频率估计概率 65

第二十一章

一元二次方程



21.1 一元二次方程

知识过关 全理解

知识点1 一元二次方程的定义 ▶ 拓展

1. 等号两边都是①_____，只含有②_____个未知数(一元)，并且未知数的最高次数是③_____ (二次)的方程，叫做一元二次方程. 例如： $\sqrt{3}x^2 + x + 1 = 0$ ， $\frac{1}{2}x^2 + 7 = 0$ 是一元二次方程.

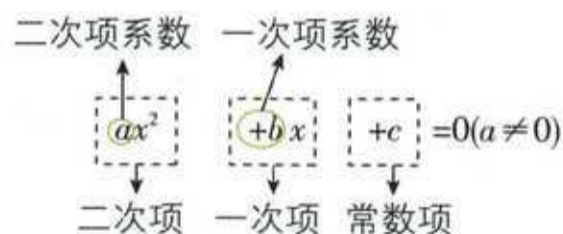
2. 一元二次方程必须同时满足三个条件：④_____、⑤_____、⑥_____.

例如： $\frac{1}{x^2} + x = 2$ ， $x^2 + 1$ ， $x^2 + y - 3 = 0$ ， $x^3 - 3x + 8 = 0$ ， $(x-2)(x+5) = x^2 - 1$ 均不是一元二次方程.

知识点2 一元二次方程的一般形式 ▶ 注意

重点

1. 一元二次方程的一般形式是 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，其中⑦_____是二次项，⑧_____是二次项系数；⑨_____是一次项，⑩_____是一次项系数；⑪_____是常数项.



注：确定各项及各项系数时不要漏掉各项的符号

2. (1)⑫_____是一元二次方程一般形式的重要条件，但是⑬_____可以为0；(2)任何一个一元二次方程都可以化成⑭_____；(3)一元二次方程的各项都包含它⑮_____.

3. 一元二次方程的特殊形式.

(1)当 $b=0$ 时，得⑯_____；

(2)当 $c=0$ 时，得⑰_____；

(3)当 $b=0$ 且 $c=0$ 时，得⑱_____.

知识点3 一元二次方程的解(根)

难点

1. 使方程左右两边相等的未知数的值就是这个一元二次方程的解，一元二次方程的解也叫做一元二次方程的⑲_____。▶ 方法

敲黑板 划重点

▶ 拓展 “元”是指方程中的未知数，方程中含有几个未知数，就称为“几元”方程；“次”是指方程中含未知数的项的最高次数，最高次数是几就称为“几次”方程.

▶ 注意 (1)若已知 $ax^2 + bx + c = 0$ 是关于 x 的一元二次方程，则隐含 $a \neq 0$ 这一条件.

(2)判断一个方程是不是一元二次方程，必须把方程化成最简形式后，才能去判断，化简是指去分母、去括号、移项、合并同类项.

方法 根的应用

(1)代入法是常用的验根方法，即把未知数的值代入方程，验证方程左右两边是否相等. 若方程左右两边相等，则未知数的值是原方程的根；若方程左右两边不相等，则未知数的值不是原方程的根.

2. 一元二次方程可能没有实数根, 可能有两个相等的实数根, 也可能有两个不相等的实数根. 若 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 的两个实数根, 则下列两个等式成立, 并可利用这两个等式求解未知参数: $ax_1^2+bx_1+c=0 (a \neq 0), ax_2^2+bx_2+c=0 (a \neq 0)$.

答案

- ①整式 ②一 ③2 ④是整式方程 ⑤只含有一个未知数 ⑥未知数的最高次数是2 ⑦ ax^2 ⑧ a ⑨ bx ⑩ b ⑪ c ⑫ $a \neq 0$ ⑬ b, c ⑭一般形式 ⑮前面的符号 ⑯ $ax^2+c=0 (a \neq 0)$ ⑰ $ax^2+bx=0 (a \neq 0)$ ⑱ $ax^2=0 (a \neq 0)$ ⑲根



敲黑板 划重点

(2) 若方程的系数中含有字母, 代入方程的根, 可求出方程中所含其他字母的值.

题型过关 全提升

题型1 根据一元二次方程的定义求值

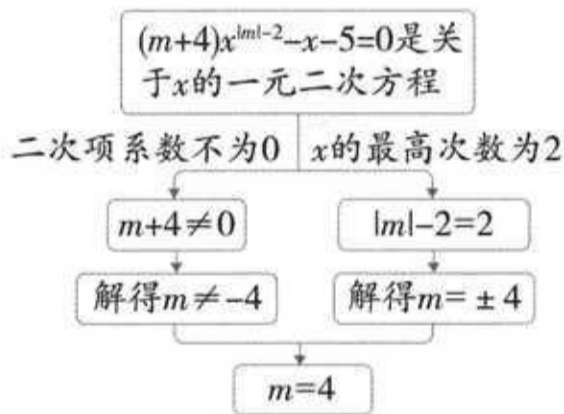
根据一元二次方程的定义中未知数的最高次数是2, 可得到关于所求未知数的方程, 通过解方程寻求正确答案, 注意二次项系数不为零的隐含条件.



例题1 若 $(m+4)x^{|m|-2}-x-5=0$ 是关于 x 的一元二次方程, 则 m 的值为 ()

- A. 4 B. -4 C. ± 4 D. ± 2

【解析】



【答案】A

题型2 根据实际问题列一元二次方程

例题2 工人师傅给一幅长为 120 cm, 宽为 40 cm 的矩形书法作品装裱(长边与地面平行), 作品的四周需要留白, 已知左、右留白部分的宽度一样, 上、下留白部分的宽度一样, 而且左侧留白部分的宽度是上面留白部分的宽度的 2 倍, 使得装裱后整个挂图的面积为 7 000 cm². 设上面留白部分的宽度为 x cm, 则可列方程为_____.

【解析】设上面留白部分的宽度为 x cm, 则左、右留白部分的宽度为 $2x$ cm. 根据题意, 可列方程为 $(120+4x)(40+2x)=7\ 000$.

【答案】 $(120+4x)(40+2x)=7\ 000$



变式练 刷重点

变式练1 (1) 当 m _____ 时, 关于 x 的方程 $mx^2-3x=x^2-mx+2$ 是一元二次方程.

(2) 若 $(m-2)x^{|m|}+3x-1=0$ 是关于 x 的一元二次方程, 则 $m=$ _____.

(3) 若关于 x 的方程 $(m-2)x^2+\sqrt{m}x+1=0$ 是一元二次方程, 则 m 的取值范围是_____.

答案见 P3

变式练2 股票每天的涨、跌幅均不能超过 10%, 即当涨了原价的 10% 后, 便不能再涨, 叫做涨停; 当跌了原价的 10% 后, 便不能再跌, 叫做跌停. 已知一只股票某天跌停, 之后两天时间又涨回到原价. 若这两天此股票股价的平均增长率为 x , 则 x 满足的方程是 ()

- A. $(1+x)^2=\frac{11}{10}$ B. $(1+x)^2=\frac{10}{9}$
C. $1+2x=\frac{11}{10}$ D. $1+2x=\frac{10}{9}$

答案见 P3

创新过关 提素养

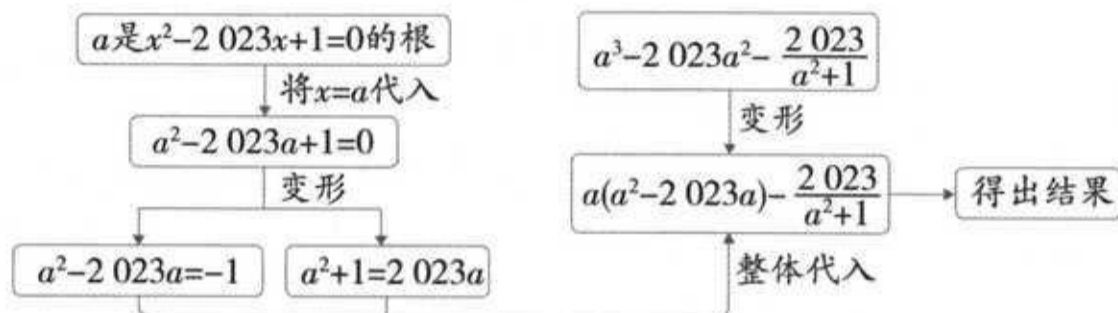
题型3 已知方程的根,求代数式的值(整体代入思想)

已知方程的根,无法解出所含参数时,应采用整体代入思想解决问题,将所求代数式的一部分看成一个整体,通常这部分通过已知条件可求出,将其整体代入即可求解.



例题3 已知 a 是方程 $x^2 - 2\,023x + 1 = 0$ 的一个根,则 $a^3 - 2\,023a^2 - \frac{2\,023}{a^2+1} =$ _____.

【思路分析】



【解析】 $\because a$ 是方程 $x^2 - 2\,023x + 1 = 0$ 的一个根, $\therefore a^2 - 2\,023a + 1 = 0$, 即

$$a^2 - 2\,023a = -1, a^2 + 1 = 2\,023a, \text{ 则原式} = a(a^2 - 2\,023a) - \frac{2\,023}{a^2 + 1} = -a - \frac{2\,023}{2\,023a}$$

$$= -a - \frac{1}{a} = -\frac{a^2 + 1}{a} = -\frac{2\,023a}{a} = -2\,023, \text{ 故答案为 } -2\,023.$$

【答案】 $-2\,023$



变式练 刷重点

变式练3 (1) 若 m 是方程 $2x^2 - 3x - 1 = 0$ 的一个实数根, 则 $2\,022 - 6m^2 + 9m$ 的值为 _____.

(2) 已知 m 为方程 $x^2 + 3x - 2\,022 = 0$ 的一个根, 那么 $m^3 + 2m^2 - 2\,025m + 2\,022$ 的值为 _____.

答案见本页

变式练答案

1. (1) $\neq 1$ (2) -2 (3) $m \geq 0$ 且 $m \neq 2$ **【解析】** (1) 原方程可整理得 $(m-1)x^2 + (m-3)x - 2 = 0$. \because 原方程是一元二次方程, $\therefore m-1 \neq 0$, 解得 $m \neq 1$. (2) $\because (m-2)x^{|m|} + 3x - 1 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程, $\therefore |m| = 2$ 且 $m-2 \neq 0$, 解得 $m = -2$. (3) 由题意, 得 $m-2 \neq 0$ 且 $m \geq 0$, $\therefore m \geq 0$ 且 $m \neq 2$.

2. B **【解析】** 跌停后股价为原价的 90%, 两天又涨回到 1, 则 $90\%(1+x)^2 = 1$, 即 $(1+x)^2 = \frac{10}{9}$. 故选 B.

3. (1) 2 019 (2) 0 **【解析】** (1) $\because m$ 是方程 $2x^2 - 3x - 1 = 0$

的一个实数根, $\therefore 2m^2 - 3m - 1 = 0$, $\therefore 2m^2 - 3m = 1$, $\therefore 2\,022 - 6m^2 + 9m = 2\,022 - 3(2m^2 - 3m) = 2\,022 - 3 \times 1 = 2\,019$. 故答案为 2 019.

(2) $\because m$ 为方程 $x^2 + 3x - 2\,022 = 0$ 的一个根, $\therefore m^2 + 3m - 2\,022 = 0$, $\therefore m^2 = -3m + 2\,022$, $\therefore m^3 = m(-3m + 2\,022) = -3m^2 + 2\,022m$, $\therefore m^3 + 2m^2 - 2\,025m + 2\,022 = -3m^2 + 2\,022m + 2m^2 - 2\,025m + 2\,022 = -m^2 - 3m + 2\,022 = -(-3m + 2\,022) - 3m + 2\,022 = 0$. 故答案为 0.

21.2 解一元二次方程

知识过关 全理解

知识点1 直接开平方法解一元二次方程

- 非负数 a 的算术平方根为 \sqrt{a} , 平方根为 $\pm\sqrt{a}$. 例如:
144 的算术平方根为 $\sqrt{144} = 12$, 平方根为 $\pm\sqrt{144} = \pm 12$.
- 根据①_____直接开平方来解一元二次方程的方法, 叫做直接开平方法. 例如 $x^2 = 25$, 解得 $x = \pm 5$.
一般地, 对于方程 $x^2 = p$, ▶ 拓展 1

$p > 0$	方程有两个不等的实数根 $x_1 = \text{②}$, $x_2 = \text{③}$
$p = 0$	方程有两个相等的实数根 $x_1 = x_2 = \text{④}$
$p < 0$	方程⑤_____

- 直接降次解一元二次方程的步骤 ▶ 注意 1
 - 将方程化为 $x^2 = p$ 或 $(mx+n)^2 = p (p \geq 0, m \neq 0)$ 的形式;
 - 直接开平方化为两个一元一次方程;
 - 解两个一元一次方程得到原方程的解.

知识点2 配方法解一元二次方程

重点

- 解一元二次方程时, 先把⑥_____移到右边, 再把它的左边配成含有未知数的⑦_____, 即将方程化为 $(x+a)^2 = b$ 的形式, 如果右边是一个非负数, 那么就可以利用⑧_____的方法求解. 这种通过配成完全平方形式来解一元二次方程的方法, 叫做配方法.
- 配方法解一元二次方程的一般步骤(示例) ▶ 注意 2

一般步骤	方法	实例 ($9y^2 - 18y - 4 = 0$)
一移	移项	将常数项移到方程的右边, 含未知数的项移到方程的左边 $9y^2 - 18y = 4$
二化	二次项系数化为 1	方程左、右两边同时除以二次项系数 $y^2 - 2y = \frac{4}{9}$
三配	配方	方程左、右两边同时加上一次项系数一半的平方 $y^2 - 2y + 1 = \frac{4}{9} + 1,$ 即 $(y-1)^2 = \frac{13}{9}$
四开	开平方	利用平方根的意义直接开平方 $y-1 = \pm \frac{\sqrt{13}}{3}$
五解	得出两个根	移项, 合并同类项 $y_1 = 1 + \frac{\sqrt{13}}{3}, y_2 = 1 - \frac{\sqrt{13}}{3}$



敲黑板 划重点

拓展 1 其他适用直接开平方法的情形

$$(1) \begin{cases} x^2 - q = p \\ (p+q \geq 0) \end{cases} \begin{array}{l} \text{移项后左右同} \\ \text{时开平方降次} \end{array}$$

$$x = \pm \sqrt{p+q};$$

$$(2) \begin{cases} q(mx+a)^2 = p (pq \geq 0, q \neq 0, m \neq 0) \end{cases} \begin{array}{l} \text{左右同时除以系} \\ \text{数后开平方降次} \end{array}$$

$$mx+a = \pm \sqrt{\frac{p}{q}};$$

$$(3) \begin{cases} (mx+a)^2 = (nx+b)^2 \\ (m \neq 0, n \neq 0) \end{cases} \begin{array}{l} \text{左右同时} \\ \text{开平方降次} \end{array}$$

$$mx+a = \pm (nx+b).$$

注意 1 (1) 利用直接开平方法解一元二次方程时, 要注意开平方的条件是被开方数必须是非负数, 否则无解.
(2) 通过将方程两边开平方, 我们将原来的一元二次方程转化为两个一元一次方程, 达到了将二次方程“降次”的目的.

(3) 利用直接开平方法解一元二次方程时, 要注意开平方的结果一般有两个.

注意 2 配方法使用揭秘

- 当二次项系数不为 1 时, 先将二次项系数化为 1.
- 通常将常数项移到方程的右边, 移项时注意变号.
- 在方程两边都加上一次项系数一半的平方.

归纳:当方程一边配成了关于未知数的完全平方式后,如果另一边是正数,那么这个方程就有两个不相等的实数根;如果另一边是零,那么这个方程就有两个相等的实数根;如果另一边是负数,那么这个方程就没有实数根.

3. 解题依据

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$,把公式中的 a 看作未知数 x ,并用 x 代替,则有 $(x \pm b)^2 = x^2 \pm 2bx + b^2$.

知识点3 一元二次方程根的判别式

 重点

1. 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$,通过配方可得 $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$,则方程根的情况由 $b^2 - 4ac$ 的符号决定. ▶ 拓展2

一般地,式子⑨叫做一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 根的判别式,通常用希腊字母“⑩”表示它,即⑪.

2. 根的判别式 Δ 的符号与一元二次方程根的情况 ▶ 对点例、▶ 拓展3

- (1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 一元二次方程有两个不相等的实数根;
- (2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 一元二次方程有两个相等的实数根;
- (3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 一元二次方程无实数根.

3. 应用

- (1) 不解方程判断一元二次方程根的情况;
- (2) 根据方程根的情况求字母系数的取值范围.

知识点4 公式法解一元二次方程 ▶ 注意3

 重点

1. 当 $\Delta \geq 0$ 时,方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 通过配方,其实数根可写为⑫的形式,这个式子叫做一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的求根公式.将各系数直接代入求根公式,这种解一元二次方程的方法叫做公式法. ▶ 拓展4

$\Delta > 0$	方程有两个不相等的实数根 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$\Delta = 0$	方程有两个相等的实数根⑬
$\Delta < 0$	方程无实数根

2. 利用公式法解一元二次方程的一般步骤

- (1) 把方程化为一般形式,确定⑭的值; ▶ 注意4
- (2) 求出 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的值;
- (3) 若 $\Delta \geq 0$,则将 a, b, c 的值代入⑮求出方程的根,若 $\Delta < 0$,则方程⑯.

知识点5 因式分解法解一元二次方程

 重点

1. 先因式分解,使一元二次方程化为两个⑰的形



敲黑板 划重点

▶ 拓展2 二次三项式 $ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的配方

(1) 提: $a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$;

(2) 凑: $a[x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}]$;

(3) 整理,得 $a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$.

▶ 对点例 判断一元二次方程 $x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$ 根的情况.

【解】方程 $x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$ 中, $a = 1, b = \sqrt{3}, c = -1$,

可得 $\Delta = (\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 7 > 0$,所以方程有两个不相等的实数根.

▶ 拓展3 “方程有实根”与“一元二次方程有实根”是两个不同的概念,“方程有实根”中的方程可以是一元一次方程,也可以是其他方程,只要有实根即可;而“一元二次方程有实根”隐含两个条件:①二次项系数不为0;② $\Delta \geq 0$.要加以区别.

▶ 注意3 用公式法解一元二次方程的前提条件有两个:① $a \neq 0$;② $b^2 - 4ac \geq 0$.

▶ 拓展4 公式法、配方法、直接开平方法的关系

$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0) \xrightarrow{\text{配方}} (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \xrightarrow{\text{直接开平方}} x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(求根公式)

▶ 注意4 将方程化为一般形式后,要注意各项系数的符号.例如解方程 $10x - 15 = x^2 + 2x$ 时,先化为一般形式得到 $x^2 - 8x + 15 = 0$,再将 $a = 1, b = -8, c = 15$ 代入求根公式即可.

式,再使这两个一次式分别等于0,从而实现⑱,这种解一元二次方程的方法叫做因式分解法.

2. 适合用因式分解法求解的一元二次方程的形式 ▶注意5

(1) 提取公因式法: $x^2+bx=0$ $\xrightarrow[\text{公因式 } x]{\text{提取}}$ $x(x+b)=0$.

(2) 公式法: $x^2-k^2=0$ $\xrightarrow{\text{平方差公式}}$ $(x+k)(x-k)=0$;

$x^2\pm 2bx+b^2=0$ $\xrightarrow{\text{完全平方公式}}$ $(x\pm b)^2=0$.

(3) 十字相乘法: $x^2-(p+q)x+pq=0$ $\xrightarrow[\text{因式分解}]{\text{十字相乘}}$ $(x-p)(x-q)=0$.

3. 利用因式分解法解一元二次方程的一般步骤

一移	使方程的右边为0
二分	将方程的左边因式分解
三化	将方程化为两个一元一次方程
四解	写出方程的两个解

口诀:右化零,左分解;两因式,各求解.

知识点6 一元二次方程根与系数的关系

重点

1. 由求根公式可得当 $\Delta \geq 0$ 时,一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的两根分别为 $x_1 = \text{⑲}$, $x_2 = \text{⑳}$, 则 $x_1+x_2 = \text{㉑}$, $x_1x_2 = \text{㉒}$.

例如:方程 $x^2+px+q=0$ 的两根为 x_1, x_2 , 则 $x_1+x_2 = \text{㉓}$, $x_1x_2 = \text{㉔}$.

2. 一元二次方程根与系数的关系的应用 ▶注意6

- (1) 不解方程,求关于方程两根的代数式的值.
- (2) 已知方程一根,求方程的另一根及方程中字母的值.
- (3) 已知方程两根的关系,求方程中字母的值.
- (4) 与根的判别式相结合,解决一些综合题.

注意6 根与系数的关系的使用前提

一元二次方程有根,即 $\Delta = b^2-4ac \geq 0$ 且 $a \neq 0$.

答案

①平方根的意义 ② \sqrt{p} ③ $-\sqrt{p}$ ④0 ⑤无实数根 ⑥常数项 ⑦完全平方式

⑧直接开平方 ⑨ b^2-4ac ⑩ Δ ⑪ $\Delta = b^2-4ac$ ⑫ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ⑬ $x_1 = x_2 =$

$-\frac{b}{2a}$ ⑭ a, b, c ⑮求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ⑯无实数根 ⑰一次式的乘积等

于0 ⑱降次 ⑲ $\frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ⑳ $\frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ㉑ $-\frac{b}{a}$ ㉒ $\frac{c}{a}$ ㉓ $-p$ ㉔ q

敲黑板 划重点

注意5 切记方程两边不要随意约去含未知数的代数式

如 $x(x-1)=x$, 若约去 x , 则会导致丢掉 $x=0$ 这个根, 应先移项, 提公因式 x , 化为 $x(x-1-1)=0$, 即 $x=0$ 或 $x-1-1=0$, 解得 $x_1=0, x_2=2$.

欢迎访问：电子书学习和下载网站 (<https://www.shgis.com>)

文档名称：2025初中必刷题-9上-数学（人教版）狂K重点.pdf

请登录 <https://shgis.com/post/4205.html> 下载完整文档。

手机端请扫码查看：

