附

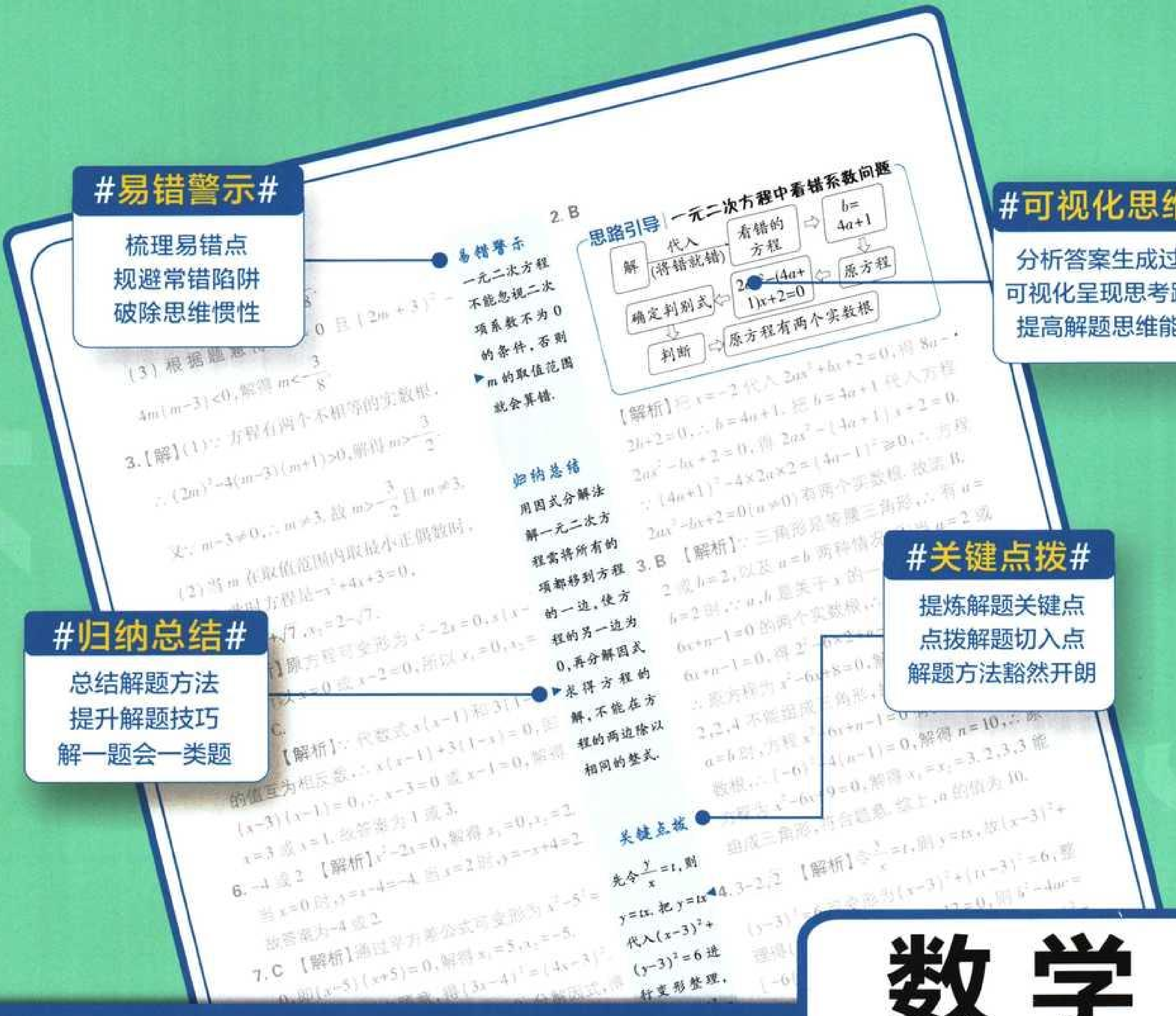
理想树

批注式
详答与详析

扫码查答案

#易错警示#
梳理易错点
规避常错陷阱
破除思维惯性

#可视化思维#
分析答案生成过程
可视化呈现思考路径
提高解题思维能力



#归纳总结#
总结解题方法
提升解题技巧
解一题会一类题

#关键点拨#
提炼解题关键点
点拨解题切入点
解题方法豁然开朗

数学
九年级上册 RJ

保持
思路清晰

禁止
直接对答案

小心
错题踩坑

Q A 批注式详答与详析

第二十一章　一元二次方程

21.1　一元二次方程

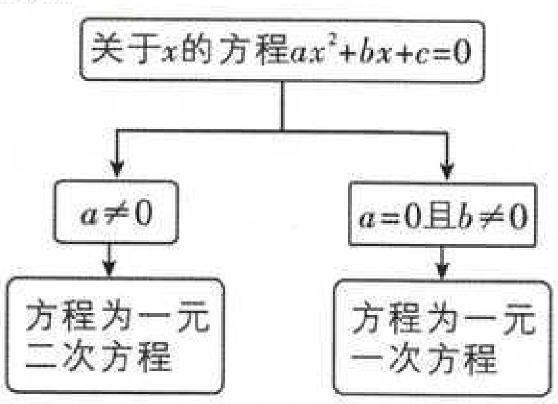
刷基础

1. B 【解析】一元二次方程需要满足的三个条件:(1)是整式方程;(2)化简后只含有一个未知数;(3)化简后未知数的最高次数是 2.

①	分母中有未知数,不是整式方程	×
②	化简得$x-1=0$,未知数的最高次数不是 2	×
③	满足一元二次方程的三个条件	√
④	当 $a=0$ 时,不含有二次项	×
⑤	不是等式,不属于方程	×

故选 B.

2. D 【解析】



故 A、B、C 选项中的说法都不正确,故选 D.

3. A 【解析】∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(4+m)x+3m=0$ 的常数项是 -6, ∴ $3m=-6$, ∴ $m=-2$, ∴ $-(4+m)=-(4-2)=-2$,即一次项为$-2x$. 故选 A.

4. $x^2-2x-15=0$　-2　-15 【解析】$\frac{1}{3}x(x-2)=5$,方程两边都乘 3,得$x(x-2)=15$,即$x^2-2x-15=0$,所以将一元二次方程$\frac{1}{3}x(x-2)=5$化为二次项系数为"1"的一般形式是 $x^2-2x-15=0$,其中,一次项系数是-2,常数项是-15. 故答案为 $x^2-2x-15=0$,-2,-15.

5. C 【解析】由题意可得 $x=2$ 是方程 $x^2-mx-2=0$ 的根,将 $x=2$ 代入方程 $x^2-mx-2=0$ 中,可得 $4-2m-2=0$,解得 $m=1$,故选 C.

6. C 【解析】由题意得当 $x=-2$ 时,$ax^2+bx=6$,当 $x=3$ 时,$ax^2+bx=6$, ∴ 方程 $ax^2+bx=6$ 的根是 $x_1=-2$,$x_2=3$,故选 C.

7. 2 024 【解析】∵ $x=2$ 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+2=0(a\neq0)$ 的解, ∴ $a\times2^2+b\times2+2=0$,化简,得 $2a+b=-1$, ∴ $2\ 023-2a-b=2\ 023-(2a+b)=2\ 023-(-1)=2\ 023+1=2\ 024$,故答案为 2 024.

8. B 【解析】根据题意,得$(16-x)(8-x)=105$. 故选 B.

9. $x(x-1)=210$ 【解析】利用比赛的总场数=参赛队伍数×(参赛队伍数-1),即可列出关于 x 的一元二次方程:$x(x-1)=210$. 故答案为 $x(x-1)=210$.

刷易错

> **易错警示** ①确定各项时需先将方程化成一般形式;②注意二次项系数不为 0.

10. D 【解析】$(m-3)x^2+m^2x=9x+5$,化为一般式为$(m-3)x^2+(m^2-9)x-5=0$. 由题意,得 $m-3\neq0$,$m^2-9=0$,解得 $m=-3$,故选 D.

刷提升

> **技巧点拨** 解决该类问题时可以利用赋值法,常用的值为 0,±1,±2,±3.

1. B 【解析】当 $x=1$ 时,$a+b+c=0$,当 $x=-2$ 时,$4a-2b+c=0$,所以方程的根是 $1,-2$,故选 B.

2. A 【解析】∵ $x^2+mx-n=0$, ∴ $x(x+m)=n$, ∴ 构造的图形中长方形的长为 $x+m$,宽为 x, ∴ 构造的图形中小正方形的边长为 $x+m-x=m=\sqrt{4}=2$,大正方形的边长为 $x+m+x=2x+m=\sqrt{12}$, ∴ $x=\frac{\sqrt{12}-2}{2}=\sqrt{3}-1$,故选 A.

> **方法技巧** 此类题目将所求代数式或其中的一部分看作一个整体,通过将这部分与已知条件建立关系,进而求解.

3. 2 021 【解析】∵ a 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2\ 022x+1=0$ 的一个根, ∴ $a^2-2\ 022a+1=0$,$a\neq0$, ∴ $a^2=2\ 022a-1$,$a^2+1=2\ 022a$, ∴ 原式$=2\ 022a-1-2\ 021a+\frac{2\ 022}{2\ 022a}=a-1+\frac{1}{a}=\frac{a^2+1}{a}-1=\frac{2\ 022a}{a}-1=2\ 021$,故答案为 2 021.

4. (1)$x_1=-4$,$x_2=-1$　(2)$x_1=0$,$x_2=-3$

【解析】(1)∵ 方程 $a(x+k)^2+2\ 023=0$ 的解是 $x_1=-2$,$x_2=1$, ∴ $a(x+k+2)^2+2\ 023=0$ 中 $x+2=-2$ 或 $x+2=1$,解得 $x_1=-4$,$x_2=-1$,故答案为 $x_1=-4$,$x_2=-1$.

(2)∵ 方程 $a(x+k)^2+2\ 023=0$ 的解是 $x_1=-2$,$x_2=1$, ∴ $a(x-k+2)^2+2\ 023=0$ 中 $x+2=2$ 或 $x+2=-1$, ∴ $x_1=0$,$x_2=-3$,故答案为 $x_1=0$,$x_2=-3$.

5. -2 【解析】设方程 $x^2+mx+1=0$ 和 $x^2+x+m=$

0 的公共根为 t，则 $\begin{cases} t^2+mt+1=0,① \\ t^2+t+m=0,② \end{cases}$ ①－②得 $(m-1)t=m-1$. 如果 $m=1$，那么两个方程均为 $x^2+x+1=0$，不符合题意；如果 $m\neq 1$，那么 $t=1$，把 $t=1$ 代入①，得 $1+m+1=0$，解得 $m=-2$. 故常数 m 的值为 -2.

6.【解】(1)在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\because BC=1, AC=3-1=2$，$\therefore AB=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$\therefore AE=AD=AB=\sqrt{5}$. $\because OA=1$，$\therefore OE=AE-OA=\sqrt{5}-1$，$OD=AD+OA=\sqrt{5}+1$，$\therefore$ D 点表示的数为 $\sqrt{5}+1$，即 $m=\sqrt{5}+1$，E 点表示的数为 $-\sqrt{5}+1$，即 $n=-\sqrt{5}+1$.

(2)把 $x=\sqrt{5}+1$ 代入方程 $x^2+bx-4=0$ 得 $(\sqrt{5}+1)^2+(\sqrt{5}+1)b-4=0$，解得 $b=-2$，即 b 的值为 -2.

(3)琮琮说得不对. 理由如下：把 $x=-\sqrt{5}+1$ 代入方程得 $(-\sqrt{5}+1)^2-2(-\sqrt{5}+1)-4=5-2\sqrt{5}+1+2\sqrt{5}-2-4=0$，$\therefore x=n$ 一定是此方程的根.

刷素养

7.【解】(1)设所求方程的根为 y，则 $y=-x$，所以 $x=-y$. 把 $x=-y$ 代入已知方程，得 $(-y)^2+(-y)-2=0$. 化简得 $y^2-y-2=0$，故所求方程为 $y^2-y-2=0$. 故答案为 $y^2-y-2=0$.

(2)设所求方程的根为 y，则 $y=\frac{1}{x}$，所以 $x=\frac{1}{y}$. 把 $x=\frac{1}{y}$ 代入已知方程，得 $2\left(\frac{1}{y}\right)^2-7\cdot\frac{1}{y}+3=0$. 化简得 $3y^2-7y+2=0$，即所求方程为 $3y^2-7y+2=0$.

21.2 解一元二次方程

21.2.1 配方法

课时1 直接开平方法

刷基础

1. D 【解析】$\because x^2-4=0$，$\therefore x^2=4$，则 $x_1=2$，$x_2=-2$，$\therefore$ 丁正确，故选 D.

2. D 【解析】方程 $x^2+m=0$ 整理得 $x^2=-m$. 因为 $x^2=-m$ 有实数解的条件是 $-m\geqslant 0$，所以 $m\leqslant 0$，故选 D.

3. $2\sqrt{2}$　$-2\sqrt{2}$ 【解析】移项得 $x^2=8$，开平方得 $x=\pm 2\sqrt{2}$，即 $x_1=2\sqrt{2}$，$x_2=-2\sqrt{2}$，故答案为 $2\sqrt{2}$，$-2\sqrt{2}$.

4. 4 【解析】由题意得两根不相等. $\because x^2=\frac{b}{a}$，$\therefore x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$，$\therefore$ 方程的两个根互为相反数，$\therefore m+1+2m-4=0$，解得 $m=1$，$\therefore$ 一元二次方程 $ax^2=b$ 的两个根分别是 2 与 -2，$\therefore \sqrt{\frac{b}{a}}=2$，$\therefore \frac{b}{a}=4$. 故答案为 4.

5.【解】(1)移项，得 $3x^2=\frac{1}{27}$，二次项系数化为 1，得 $x^2=\frac{1}{81}$，根据平方根的意义，得 $x_1=\frac{1}{9}$，$x_2=-\frac{1}{9}$.

(2)移项、合并同类项，得 $4x^2=1$. 二次项系数化为 1，得 $x^2=\frac{1}{4}$. 根据平方根的意义，得 $x=\pm\frac{1}{2}$，即 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{1}{2}$.

6. B 【解析】由 $(x-\sqrt{17})^2=100$，得 $x-\sqrt{17}=\pm 10$，$\therefore x=\sqrt{17}\pm 10$. 由 $(y-4)^2=17$，得 $y-4=\pm\sqrt{17}$，$\therefore y=4\pm\sqrt{17}$. $\because a, b$ 都是正数，$\therefore a=\sqrt{17}+10$，$b=4+\sqrt{17}$，$\therefore a-b=(\sqrt{17}+10)-(4+\sqrt{17})=6$. 故选 B.

技巧点拨：运用三角形的三边关系解决问题时常常把最长的边作为第三边，通过比较剩下两边之和与最长边的大小来判断能否构成三角形.

7. C 【解析】$(x-3)^2=4$，$x-3=\pm 2$，解得 $x_1=5$，$x_2=1$. 若 $x=5$，则三角形的三边长分别为 4，5，6，其周长为 $4+5+6=15$；若 $x=1$，$1+4=5<6$，不能构成三角形，则此三角形的周长是 15. 故选 C.

8. 2 或 -12 【解析】设□内的数为 x，则 $(x+5)^2=49$，两边开平方得，$x+5=7$ 或 $x+5=-7$，解得 $x=2$ 或 -12，即□内的数为 2 或 -12. 故答案为 2 或 -12.

9. 2 【解析】$(a+b+1)(a+b-1)=15$，变形得 $[(a+b)+1][(a+b)-1]=15$，即 $(a+b)^2-1=15$，移项得 $(a+b)^2=16$，$\therefore a+b=4$ 或 $a+b=-4$. 又 $\because a+b\geqslant 0$，$\therefore a+b=4$，则 $\sqrt{a+b}=\sqrt{4}=2$.

刷易错

易错警示：解决此类问题时，我们需要注意所求代数式的取值范围，本题容易忽略 x^2+y^2 的值是非负的，所以要找出题干所隐含的条件再解题.

10.【解】晓梅的解题步骤在第②步出错了. 正确的解题步骤如下：$\because (x^2+y^2-3)^2=16$，$\therefore x^2+y^2-3=\pm 4$，$\therefore x^2+y^2=7$，$x^2+y^2=-1$. $\because$ 不论 x，y 为何值，x^2+y^2 都大于等于 0，$\therefore x^2+y^2=7$.

课时2 配方法

刷基础

1. C 【解析】$\because x^2+5x+3=0$，$\therefore x^2+5x=-3$，$\therefore x^2+5x+\frac{25}{4}=-3+\frac{25}{4}$，$\therefore \left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$，故选 C.

2. C 【解析】$\because x^2+6x+c=0$，$\therefore x^2+6x=-c$，$\therefore x^2+6x+9=-c+9$，即 $(x+3)^2=-c+9$. $\because (x+3)^2=2c$，$\therefore 2c=-c+9$，解得 $c=3$.

3. 1 【解析】由 $x^2+4x+n=0$ 可得 $(x+2)^2=4-n$，由 $(x+m)^2=3$，得 $m=2,4-n=3$，$\therefore n=1$，$\therefore (m-n)^{2023}=1$，故答案为 1.

4. 1 或 −3 【解析】依题意得 $(2+x)x=3$，整理，得 $x^2+2x=3$，所以 $(x+1)^2=4$，所以 $x+1=\pm2$，所以 $x=1$ 或 $x=-3$.

5.【解】(1) $x^2-4x+1=0$，移项，得 $x^2-4x=-1$，配方，得 $x^2-4x+4=-1+4$，即 $(x-2)^2=3$，开方，得 $x-2=\pm\sqrt{3}$，解得 $x_1=2+\sqrt{3}$，$x_2=2-\sqrt{3}$.

(2) $x^2-2x-1=0$，移项，得 $x^2-2x=1$，配方，得 $x^2-2x+1=2$，$(x-1)^2=2$，$x-1=\pm\sqrt{2}$，$\therefore x_1=1+\sqrt{2}$，$x_2=1-\sqrt{2}$.

6. B 【解析】$2x^2-12x=5$，方程两边同时除以 2，得 $x^2-6x=\frac{5}{2}$，方程两边同时加上 9，得 $x^2-6x+9=\frac{23}{2}$，即 $(x-3)^2=\frac{23}{2}$. 故选 B.

7. C 【解析】$\because 2x^2-2x=1$，$\therefore x^2-x+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$，$\therefore \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$，$\therefore x-\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore x_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore 1<x_1<2$，故选 C.

8. −6 【解析】$\because \frac{1}{2}x^2+x-\frac{5}{2}=0$，$\therefore \frac{1}{2}(x^2+2x-5)=0$，$\therefore \frac{1}{2}[(x+1)^2-6]=0$，$\therefore k=-6$，故答案为 −6.

9.【解】根据题意，得 $3x^2-6x=12$，即 $x^2-2x=4$. 配方，得 $x^2-2x+1=5$，即 $(x-1)^2=5$. 开方，得 $x-1=\pm\sqrt{5}$. 解得 $x=1\pm\sqrt{5}$. 故 x 的值为 $1+\sqrt{5}$ 或 $1-\sqrt{5}$.

刷易错

10.【解】上述过程中开始出错的步骤为③，原因是不符合等式的性质. 故答案为③，不符合等式的性质. 正确的解答过程如下：移项，得 $2x^2-8x=18$. 两边同时除以 2，得 $x^2-4x=9$. 配方，得 $x^2-4x+4=9+4$，即 $(x-2)^2=13$，所以 $x-2=\pm\sqrt{13}$. 故 $x_1=2+\sqrt{13}$，$x_2=2-\sqrt{13}$.

易错警示
配方时，等式两边要同时加上一次项系数一半的平方，不要漏加而造成错解.

刷提升

1. B 【解析】因为 $x^2+6x+2=0$，所以 $x^2+6x+9-9+2=0$，即 $(x+3)^2-7=0$，所以 $p=3$，$q=-7$，即直线的解析式为 $y=3x-7$，所以图象不经过第二象限，故选 B.

2. B 【解析】分两种情况：当 $x>-x$，即 $x>0$ 时，$\because \max(x,-x)=x^2-3x-5$，$\therefore x=x^2-3x-5$，整理得 $x^2-4x-5=0$，$x^2-4x=5$，$x^2-4x+4=5+4$，即 $(x-2)^2=9$，$x-2=\pm3$，则 $x_1=5$，$x_2=-1$（舍去）；当 $x<-x$，即 $x<0$ 时，$\because \max(x,-x)=x^2-3x-5$，$\therefore -x=x^2-3x-5$，整理得 $x^2-2x-5=0$，$x^2-2x=5$，$x^2-2x+1=5+1$，$(x-1)^2=6$，$x-1=\pm\sqrt{6}$，$x-1=\sqrt{6}$ 或 $x-1=-\sqrt{6}$，$\therefore x_1=1+\sqrt{6}$（舍去），$x_2=1-\sqrt{6}$. 综上所述，$x=5$ 或 $x=1-\sqrt{6}$，故选 B.

3. D 【解析】$\because x^2-2bx+4c^2=0$，$\therefore x^2-2bx=-4c^2$，则 $x^2-2bx+b^2=b^2-4c^2$，$\therefore (x-b)^2=b^2-4c^2$，$\therefore x-b=\pm\sqrt{b^2-4c^2}$，$\therefore x_1=b+\sqrt{b^2-4c^2}$，$x_2=b-\sqrt{b^2-4c^2}$. 在 Rt△$ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=2c$，$AB=b$，$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{b^2-4c^2}$，$\therefore$ 方程较大的根为 $AB+BC=AB+BE=AE$ 的长度，故选 D.

4. (1) ⑤

(2)【解】$\because x^2+2nx-8n^2=0$，$\therefore x^2+2nx=8n^2$，$\therefore x^2+2nx+n^2=8n^2+n^2$，即 $(x+n)^2=9n^2$，$\therefore x+n=\pm3n$，解得 $x_1=2n$，$x_2=-4n$.

技巧点拨
比较两个代数式的值的大小，一般用作差法，若不能直接判断作差后结果的正负性，如含二次项时，一般先用配方法将其变形.

5. (1)【解】根据题意得，$(2x^2+5x-3)-(x^2+x-8)=2$，$2x^2+5x-3-x^2-x+8=2$，$2x^2+5x-3-x^2-x+8-2=0$，$x^2+4x+3=0$，$x^2+4x=-3$，$x^2+4x+4=-3+4$，$(x+2)^2=1$，$x+2=\pm1$，$\therefore x_1=-1$，$x_2=-3$，即当 x 为 −1 或 −3 时，代数式 A 的值比 B 的值大 2.

(2)【证明】$A-B=(2x^2+5x-3)-(x^2+x-8)=2x^2+5x-3-x^2-x+8=x^2+4x+5=x^2+4x+4+1=(x+2)^2+1$，对于任意 x 的值，$(x+2)^2\geq0$，$\therefore (x+2)^2+1>0$，即 $A-B>0$，$\therefore$ 对于任意 x 的值，代数式 A 的值恒大于 B 的值.

刷素养

6.【解】(1) $\because (x+5)(x+9)=5$，$\therefore [(x+7)-2]\cdot[(x+7)+2]=5$，$\therefore (x+7)^2-4=5$，$\therefore (x+7)^2=9$，

$\therefore x+7=3$ 或 $x+7=-3$，解得 $x_1=-4$，$x_2=-10$. $\therefore a,b,c,d$ 表示的数分别为 7，2，−4，−10. 故答案为 7，2，−4，−10.

(2) $\because (x-5)(x+7)=12$，$\therefore [(x+1)-6][(x+1)+6]=12$，$\therefore (x+1)^2-36=12$，$\therefore (x+1)^2=48$，$\therefore x+1=4\sqrt{3}$ 或 $x+1=-4\sqrt{3}$，解得 $x_1=-1+4\sqrt{3}$，$x_2=-1-4\sqrt{3}$.

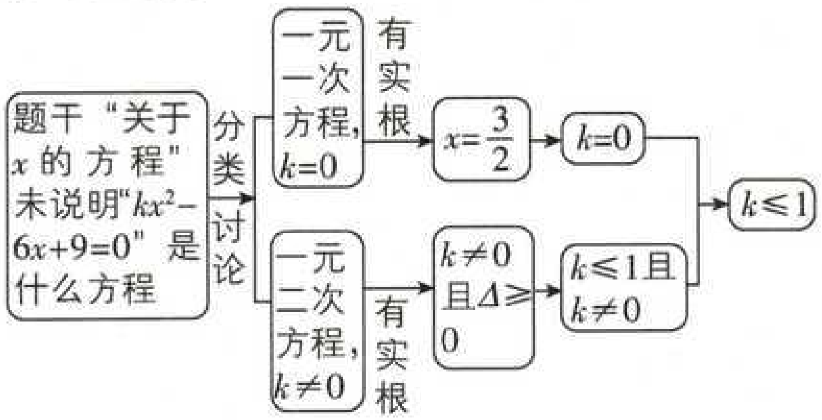
21.2.2 公式法

刷基础

1. C 【解析】由 $2x^2-4x+5=1$ 得到 $2x^2-4x+4=0$. $\because b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times4=-16<0$，$\therefore$ 方程没有实数根.

2. A 【解析】$\because a=1,b=p,c=q,\therefore \Delta=b^2-4ac=p^2-4q\geqslant0$ 时，关于 x 的一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 能用公式法求解.

3. B 【解析】



4. $\frac{1}{2}$(答案不唯一) 【解析】$\because$ 方程有两个不相等的实数根，$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times m>0$，且 $m\neq0$，解得 $m<1$ 且 $m\neq0$. 故答案为 $\frac{1}{2}$(答案不唯一).

易错警示 利用一元二次方程根的判别式解决方程中待定字母的取值范围问题时，注意"二次项系数不为0"这个特定的条件.

5. D 【解析】$\because 3x^2-2x-1=0,\therefore a=3,b=-2,c=-1$，$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times3\times(-1)}}{2\times3}$. 故选 D.

6. A 【解析】$\because$ 用公式法解一个一元二次方程的根为 $x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2+4\times3\times1}}{2\times3}$，根据一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的求根公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，可得 $a=3,b=5,c=-1$，$\therefore$ 此方程的二次项系数、一次项系数、常数项分别为 $3,5,-1$.

7. D 【解析】$\because \Delta=1^2-4\times(-1)=5>0$，$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根，即 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. 故选 D.

8. $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ 【解析】根据题意得 $x(x+1)+2+2x-1=0$，整理得 $x^2+3x+1=0$，则 $a=1,b=3,c=1$. $\because \Delta=b^2-4ac=3^2-4=5$，$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

刷易错

9. (1)一 原方程没有化成一般形式

(2)【解】原方程化成一般形式为 $x^2-5x-1=0$. $\because a=1,b=-5,c=-1$，$\therefore b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times(-1)=29$，$\therefore x=\frac{5\pm\sqrt{29}}{2}$，

$\therefore x_1=\frac{5+\sqrt{29}}{2},x_2=\frac{5-\sqrt{29}}{2}$.

易错警示 针对这类问题一定要先将一元二次方程化为一般形式，确定 a,b,c 的值，再利用求根公式解方程就不会导致错解.

刷提升

1. A 【解析】由数轴得 $m>0,n<0,m+n<0$，$\therefore \Delta=(-mn)^2-4(m+n)>0$，$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根. 故选 A.

2. B 【解析】关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx-1=0$ 的根的判别式为 $\Delta=b^2+4a$.

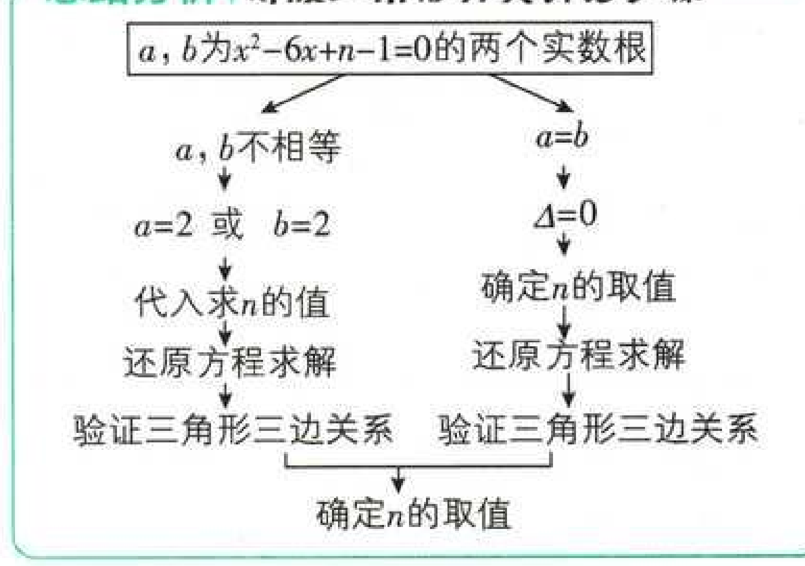
甲	当 a,b 同号时，若两数均为负数，则不能确保 b^2+4a 为非负数，不符合条件
乙	当 $a-b-1=0$ 时，得到 $a=b+1$，所以 $b^2+4a=b^2+4(b+1)=(b+2)^2\geqslant0$，所以方程总有实数根，符合条件
丙	当 $a+b-1=0$ 时，得到 $a=1-b$，所以 $b^2+4a=b^2+4(1-b)=(b-2)^2\geqslant0$，所以方程总有实数根，符合条件

综上所述，甲的建议不符合条件，乙和丙的建议符合条件，故选 B.

3. B

关键点拨 本题需分两种情况进行讨论：①当 $a=2$ 或 $b=2$ 时；②当 $a=b$ 时. 注意利用三角形的三边关系进行验证.

思路分析 | 等腰三角形分类讨论步骤



【解析】$\because$ 三角形是等腰三角形，$\therefore$ 有 $a=2$ 或 $b=2$，以及 $a=b$ 两种情况. ①当 $a=2$ 或 $b=2$ 时，$\because a,b$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+n-1=0$ 的两个实数根，$\therefore$ 把 $x=2$ 代入 $x^2-6x+n-1=0$，得 $2^2-6\times2+n-1=0$，解得 $n=9$，$\therefore$ 原方程为 $x^2-6x+8=0$，解得 $x_1=2,x_2=4$. 而长为 $2,2,4$ 的线段不能组成三角形，故不符合题意. ②当 $a=b$ 时，方程 $x^2-6x+n-1=0$ 有两个相等的实数根，$\therefore \Delta=(-6)^2-4(n-1)=0$，解得 $n=10$，$\therefore$ 原方程为 $x^2-6x+9=0$，解得 $x_1=x_2=3$. 长为 $2,3,3$ 的线段能组成三角形，符合题意. 综上，n 的值为 10.

4. (1)$m\leqslant\frac{5}{2}$ (2)2 【解析】(1)根据题意得 $\Delta=4-4(2m-4)=20-8m\geqslant0$，解得 $m\leqslant\frac{5}{2}$.

(2)由 m 为正整数，得到 $m=1$ 或 2，利用求根公式表示出方程的根为 $x=-1\pm\sqrt{5-2m}$. $\because$ 方

程的根为整数，$\therefore 5-2m$ 为完全平方数，则 m 的值为 2.

思路分析

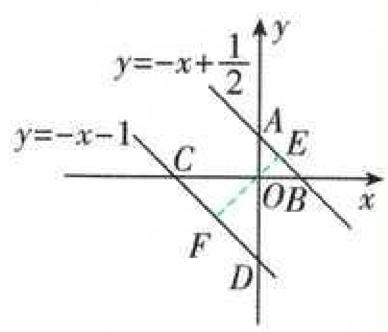
(1)根据方程有两个实数根，得到根的判别式的值大于等于0列出关于 m 的不等式，求出不等式的解集即可得到 m 的取值范围；

(2)找出 m 的取值范围中的正整数，然后结合题中条件进行取舍.

5. $\underline{\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}}$ 【解析】方程整理得 $|x|^2-3|x|-2=0$，这里 $a=1,b=-3,c=-2$. $\because b^2-4ac=9+8=17>0$，$\therefore |x|=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$（负值已舍去），解得 $x_1=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$，$x_2=-\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$，即最小一根为 $-\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$，则方程最小一根的倒数是 $-\dfrac{2}{3+\sqrt{17}}=-\dfrac{2(\sqrt{17}-3)}{8}=-\dfrac{\sqrt{17}-3}{4}=\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}$.

故答案为 $\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}$.

6. $\underline{\dfrac{3\sqrt{2}}{4}}$ 【解析】$\because$ 关于 x 的方程 $x^2-(a+2b)x+1=0$ 有两个相等实数根，$\therefore \Delta=[-(a+2b)]^2-4\times1\times1=0$，



$\therefore a+2b=2$ 或 $a+2b=-2$. $\because$ 点 $Q\left(\dfrac{1}{2}a,b\right)$，即 $Q(1-b,b)$ 或 $Q(-1-b,b)$，$\therefore$ 点 Q 所在的直线为 $y=-x+1$ 或 $y=-x-1$. $\because$ 点 $Q\left(\dfrac{1}{2}a,b\right)$ 在直线 $l:y=-x+\dfrac{1}{2}$ 下方且与直线 l 平行的直线上，$\therefore$ 点 Q 在直线 $y=-x-1$ 上. 如图，当 E,O,F 共线，且 $EF\perp AB$ 时，EF 为两直线间的距离. $\because$ 易得 $OE=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$OF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore EF=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，$\therefore PQ$ 的最小值为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. 故答案为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

7.【解】(1) $\triangle ABC$ 是等腰三角形，理由：$\because x=1$ 是方程的一个根，

$\therefore (a+b)-2c+(a-b)=0$，$\therefore a+b-2c+a-b=0$，

$\therefore a-c=0$，$\therefore a=c$，$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形.

(2)如果 $\triangle ABC$ 是等边三角形，则 $a=b=c$，原方程可化为 $2ax^2-2ax=0$，$\therefore x^2-x=0$，由求根公式得 $x_1=0,x_2=1$.

刷素养

8.【解】(1) $\because 3^2=9,(-3)^2=9,-3^2=-9$，

$\therefore M\{3^2,(-3)^2,-3^2\}=\dfrac{9+9-9}{3}=3$. 故答案为 3.

(2) $\because \min\{2x+1,4x-3,7\}=2x+1$，

$\therefore \begin{cases}2x+1\leqslant 4x-3,\\2x+1\leqslant 7,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant x\leqslant 3$，$\therefore$ 整数 x 的值为 2 或 3. 故答案为 2 或 3.

(3) $\because M\{5x,x^2,-3\}=\min\{x^2,-3\}$，且 $x^2>-3$，

$\therefore \dfrac{5x+x^2-3}{3}=-3$，整理，得 $x^2+5x+6=0$，解得 $x_1=-2,x_2=-3$.

21.2.3 因式分解法

刷基础

1. $\underline{D}$ 【解析】$\because x^2=-x$，$\therefore x^2+x=0$，$\therefore x(x+1)=0$，$\therefore x=0$ 或 $x+1=0$，解得 $x_1=0,x_2=-1$. 故 A，B，C 错误，故选 D.

2. $\underline{B}$ 【解析】$(x+5)(x-5)-2(x-5)^2=0$，$(x-5)[(x+5)-2(x-5)]=0$，$(x-5)(-x+15)=0$，$x_1=5,x_2=15$. $\because$ 长为 7，11，5 的线段和长为 7，11，15 的线段都能组成三角形，$\therefore$ 该三角形的周长是 $7+11+5=23$ 或 $7+11+15=33$，故选 B.

思路分析

用因式分解法求出方程的解即可得到第三边的长，确定等腰三角形周长时需检验一下三边长是否满足三角形三边关系定理.

3. $\underline{C}$ 【解析】$\because x^2+5x=0$，$\therefore x(x+5)=0$，$\therefore x=0$ 或 $x+5=0$，解得 $x=0$ 或 $x=-5$. $\because m$ 是方程 $x^2+5x=0$ 的一个较大的根，$\therefore m=0$. $\because x^2-x-6=0$，$\therefore (x-3)(x+2)=0$，$\therefore x-3=0$ 或 $x+2=0$，解得 $x=3$ 或 $x=-2$. $\because n$ 是方程 $x^2-x-6=0$ 的一个较小的根，$\therefore n=-2$，$\therefore m+n=0+(-2)=-2$，故选 C.

4. $\underline{4\sqrt{13}\ \text{cm}}$ 【解析】设菱形的一条对角线长为 x cm，则另一条对角线长为 $(10-x)$ cm. 由菱形的性质可知 $\dfrac{1}{2}x(10-x)=12$，整理，得 $x^2-10x+24=0$，即 $(x-4)(x-6)=0$，$\therefore x-4=0$ 或 $x-6=0$，解得 $x_1=4,x_2=6$. 当 $x=4$ 时，$10-x=6$；当 $x=6$ 时，$10-x=4$，$\therefore$ 这个菱形的两条对角线长分别为 6 cm 和 4 cm. 由菱形的性质和勾股定理得菱形的边长为 $\sqrt{\left(\dfrac{6}{2}\right)^2+\left(\dfrac{4}{2}\right)^2}=\sqrt{13}$ (cm)，$\therefore$ 菱形的周长为 $4\sqrt{13}$ cm. 故答案为 $4\sqrt{13}$ cm.

5. $\underline{x^2-2x-8=0\text{(答案不唯一)}}$ 【解析】根据题意得 $(x+2)(x-4)=0$，即 $x^2-2x-8=0$，故答案为 $x^2-2x-8=0$（答案不唯一）.

6.【解】根据题意，得 $(x+1)(x-5)=(3x-1)(x+1)$，$\therefore (x+1)(x-5)-(3x-1)(x+1)=0$，$\therefore (x+1)(-2x-4)=0$，则 $x+1=0$ 或 $-2x-4=0$，解得 $x_1=-1,x_2=-2$，$\therefore$ 若代数式 $(x+1)(x-5)$ 与 $(3x-1)(x+1)$ 的值相等，则 x 的值为 -1 或 -2.

7. C 【解析】解一元二次方程 $(x-1)^2=2(x-1)$ 最适宜的方法是因式分解法. 故选 C.

8. D 【解析】A 选项,因等式两边同时除以含未知数的代数式而丢解,故本选项错误,不符合题意;B 选项,$c=3$,故本选项错误,不符合题意;C 选项,配方时,等式两边应该同时加 4,故本选项错误,不符合题意;D 选项,$x(x-1)=3(x-1)$,$x(x-1)-3(x-1)=0$,$(x-1)(x-3)=0$,$\therefore x-3=0$ 或 $x-1=0$,$\therefore x_1=3,x_2=1$,故本选项正确,符合题意. 故选 D.

9.【解】(1)方程整理得 $x^2-2\sqrt{3}x+3=0$,配方,得 $(x-\sqrt{3})^2=0$,开方,得 $x-\sqrt{3}=0$,解得 $x_1=x_2=\sqrt{3}$.

(2)方程整理得 $x^2-2x=\frac{2}{3}$,配方,得 $x^2-2x+1=\frac{5}{3}$,即 $(x-1)^2=\frac{5}{3}$,开方,得 $x-1=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$,

解得 $x_1=1+\frac{\sqrt{15}}{3}$,$x_2=1-\frac{\sqrt{15}}{3}$.

(3)$2x^2-8x=-8$,$x^2-4x=-4$,$x^2-4x+4=0$,$(x-2)^2=0$,解得 $x_1=x_2=2$.

刷易错

10.【解】两位同学解法都错误.

小敏:当 $x-3=0$ 时,两边不能同除以 $(x-3)$.

小霞:$(x-3)(3-x-3)=0$ 出错,应为 $(x-3)\cdot(3-x+3)=0$,去括号时应变号.

解方程 $3(x-3)=(x-3)^2$ 的正确解答过程如下:

移项,得 $3(x-3)-(x-3)^2=0$.

提取公因式,得 $(x-3)(3-x+3)=0$,则 $x-3=0$ 或 $3-x+3=0$,解得 $x_1=3,x_2=6$.

> 易错警示
> 解一元二次方程时不能随便在方程两边约去含有未知数的代数式,约去的前提是该代数式不为0,否则会出现漏解现象;因式分解提取公因式后剩余的项有括号时注意去括号是否要变号.

刷提升

1. C 【解析】解方程 $x^2+2x-3=0$,得 $x_1=1$,$x_2=-3$. $\because x=-3$ 时,$x+3=0$,$\therefore$ 把 $x=1$ 代入方程 $\frac{2}{x+3}=\frac{1}{x-a}$,得 $\frac{2}{1+3}=\frac{1}{1-a}$,解得 $a=-1$. 故选 C.

2. B 【解析】$x^2-2x-24=0$,$(x-6)(x+4)=0$,$x-6=0$ 或 $x+4=0$,$x_1=6,x_2=-4$. $\because$ 点 P 的横、纵坐标恰好是方程 $x^2-2x-24=0$ 的两个根,$\therefore P$ 的坐标为 $(6,-4)$ 或 $(-4,6)$,故经过点 P 的正比例函数图象一定过第二、四象限. 故选 B.

3. B 【解析】设 $x^2+2x=y$,则原方程化为 $y(y-2)-8=0$,所以 $y^2-2y-8=0$,所以 $(y-4)(y+2)=0$,解得 $y=4$ 或 $y=-2$. 当 $y=4$ 时,$x^2+2x=4$,此时方程有解,当 $y=-2$ 时,$x^2+2x=-2$,此时方程无实数解,舍去,所以 $x^2+2x=4$. 故选 B.

> 易错警示
> 用整体思想及因式分解法求出代数式的值后,需注意该值是否可以使等式成立.

4. 6 【解析】$\because O$ 是原点,且是 AB 的中点,$\therefore OA=OB$. $\because B$ 点表示的数是 x,$\therefore A$ 点表示的数是 $-x$. $\because B$ 是 AC 的中点,$\therefore AB=BC$,$\therefore (x^2-3x)-x=x-(-x)$,即 $x^2-6x=0$,$\therefore x(x-6)=0$,解得 $x_1=0,x_2=6$. $\because$ 点 B 异于原点,$\therefore x\neq0$,$\therefore x=6$. 故答案为 6.

5.【解】(1)$\because \left(\frac{8}{2}\right)^2-3=4^2-3=16-3=13>0$,$\therefore$ 方程 $x^2-8x+3=0$ 的中点值是 4,故答案为 4.

(2)由题意得 $\frac{m}{2}=3$,$3^2-n>0$,$\therefore m=6,n<9$,$\therefore$ 方程可化为 $x^2-6x+n=0$,把 $x=n$ 代入方程 $x^2-6x+n=0$ 中,得 $n^2-6n+n=0$,即 $n^2-5n=0$,$n(n-5)=0$,解得 $n=0$ 或 $n=5$.

6.【解】(1)$\because x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$,$x^2-7x-30=(x-10)(x+3)$,$\therefore x^2+6x+8=0$ 可分解为 $(x+2)(x+4)=0$,$x^2-7x-30=0$ 可分解为 $(x-10)(x+3)=0$. 故答案为 $(x+2)(x+4)$,$(x-10)(x+3)$.

(2)$\because 4x^2-8x-5=0$ 可分解为 $(2x-5)(2x+1)=0$,$\therefore 2x-5=0$ 或 $2x+1=0$,$\therefore x=\frac{5}{2}$ 或 $x=-\frac{1}{2}$.

刷素养

7.【解】①当 $x+2\geqslant0$,即 $x\geqslant-2$ 时,$x^2+2(x+2)-4=0$,$x^2+2x=0$,解得 $x_1=0,x_2=-2$;②当 $x+2<0$,即 $x<-2$ 时,$x^2-2(x+2)-4=0$,$x^2-2x-8=0$,解得 $x_1=4$(不合题意,舍去),$x_2=-2$(不合题意,舍去). 综上所述,原方程的解是 $x=0$ 或 $x=-2$.

*21.2.4 一元二次方程的根与系数的关系

刷基础

1. C 【解析】根据根与系数的关系可得出两根之和为 4. 设方程的另一个根为 m,则 $1+m=4$,$\therefore m=3$.

2. B 【解析】$\because a,b$ 是一元二次方程 $x^2-2\,018x+1=0$ 的两根,$\therefore a+b=2\,018$,$ab=1$,$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{2\,018}{1}=2\,018$. 故选 B.

3. C 【解析】化简关于 x 的方程 $(x-1)(x+2)-p^2=0$(p 为常数),得 $x^2+x-2-p^2=0$,$\therefore b^2-4ac=1+8+4p^2=9+4p^2>0$,$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根. 根据根与系数的关系,得方程的两个根的积为 $-2-p^2<0$,$\therefore$ 方程的两个实数根

为一个正根，一个负根，故选 C.

4. A 【解析】∵ 方程 $x^2+(m^2-4)x=0$ 的两根互为相反数，∴ $-(m^2-4)=0$，解得 $m=\pm2$，故选 A.

5. B 【解析】∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+1-2m=0$ 的两个实数根之积为负数，∴ $\begin{cases}\Delta=2^2-4\times1\times(1-2m)>0,\\1-2m<0,\end{cases}$ 解得 $m>\frac{1}{2}$，∴ 实数 m 的取值范围是 $m>\frac{1}{2}$. 故选 B.

6. 7 【解析】∵ $a^2+1=3a$，$b^2+1=3b$，且 $a\neq b$，∴ a，b 可看作一元二次方程 $x^2-3x+1=0$ 的两个根，∴ 由一元二次方程根与系数的关系得 $a+b=3$，$ab=1$，∴ $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}=3^2-2=7$. 故答案为 7.

7. -2　-3 【解析】甲同学看错了 p，但没有看错 q，乙同学看错了 q，但没有看错 p，所以根据根与系数的关系，得 $q=(-3)\times1=-3$，$p=-(-2+4)=-2$.

8. -16 【解析】由题意得 $\alpha+\beta=6$. ∵ $2\alpha+3\beta=20$，可整理为 $2(\alpha+\beta)+\beta=20$，∴ $2\times6+\beta=20$，解得 $\beta=8$. 将 $x=8$ 代入方程 $x^2-6x+p=0$，有 $64-48+p=0$，解得 $p=-16$.

9. $\frac{3}{2}$ 【解析】∵ 方程 $mx^2+(2m+1)x-2=0$ 是关于 x 的一元二次方程，且有两个根，∴ $m\neq0$，$\Delta=(2m+1)^2-4m\times(-2)=4m^2+12m+1=(2m+3)^2-8\geqslant0$，∴ $(2m+3+2\sqrt{2})\cdot(2m+3-2\sqrt{2})\geqslant0$，∴ $m\leqslant-\sqrt{2}-\frac{3}{2}$ 或 $m\geqslant\sqrt{2}-\frac{3}{2}$. ∵ 此方程的两根为 x_1，x_2，∴ $x_1+x_2=-\frac{2m+1}{m}$，$x_1\cdot x_2=-\frac{2}{m}$. ∵ 两根的倒数之和为 2，∴ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-\frac{2m+1}{m}}{-\frac{2}{m}}=\frac{2m+1}{m}\cdot\frac{m}{2}=\frac{2m+1}{2}=2$，解得 $m=\frac{3}{2}$.

10. (1)【证明】∵ $x^2-(m-2)x-m=0$，∴ $\Delta=[-(m-2)]^2-4\times1\times(-m)=m^2+4>0$，∴ 无论 m 取任何实数，方程总有两个不相等的实数根.

(2)【解】∵ 方程 $x^2-(m-2)x-m=0$ 的两个实数根为 x_1，x_2，∴ $x_1+x_2=m-2$，$x_1x_2=-m$. 又 ∵ $x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=13$，∴ $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=13$，∴ $(m-2)^2-4\times(-m)=13$，解得 $m_1=3$，$m_2=-3$，即 m 的值是 3 或 -3.

易错警示

本题中忽略 $\Delta\geqslant0$ 这一条件导致错解. 针对这一类题，我们一定要看清题目中所给的条件，考虑一元二次方程有解的条件“$\Delta\geqslant0$”，才能得出正确结果.

关键点拨

本题考查了根与系数的关系，牢记“对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，两根之和等于 $-\frac{b}{a}$，两根之积等于 $\frac{c}{a}$”是解题的关键.

刷易错

11.【解】嘉佳的解题过程漏考虑了 $\Delta\geqslant0$ 这一条件. 正确的解题过程如下：根据题意得 $\Delta=(2m-1)^2-4m^2\geqslant0$，解得 $m\leqslant\frac{1}{4}$. ∵ $a+b=2m-1$，$ab=m^2$，∴ $2m-1=m^2-4$，整理得 $m^2-2m-3=0$，解得 $m_1=-1$，$m_2=3$（舍去），∴ m 的值为 -1.

刷提升

1. B 【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 是边长为 5 的菱形，DH 是 AB 边上的高，∴ $S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=AB\cdot DH$，$AB=5$，∴ $\frac{1}{2}AC\cdot BD=5DH$. ∵ 对角线 AC，BD 的长度分别是一元二次方程 $x^2+mx+24=0$ 的两实数根，∴ $AC\cdot BD=24$，∴ $\frac{1}{2}\times24=5DH$，∴ $DH=\frac{12}{5}=2.4$. 故选 B.

2. B 【解析】∵ 一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 的两个根为 m，n，∴ $m+n=2$，$mn=-1$，∴ 一次函数 $y=(m+n)x+mn$ 的图象经过第一、三、四象限. 故选 B.

3. D 【解析】∵ a，b 是方程 $x^2-3x-5=0$ 的两根，∴ $a^2-3a-5=0$，$b^2-3b-5=0$，$a+b=3$，∴ $a^2-3a=5$，$b^2=3b+5$，∴ $2a^3-6a^2+b^2+7b+1=2a(a^2-3a)+3b+5+7b+1=10a+10b+6=10(a+b)+6=10\times3+6=36$. 故选 D.

4. B 【解析】由题意得 $\Delta=(2m)^2-4(m^2-m)\geqslant0$，∴ $m\geqslant0$. ∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2+2mx+m^2-m=0$ 的两实数根 x_1，x_2 满足 $x_1x_2=2$，则 $x_1+x_2=-2m$，$x_1x_2=m^2-m=2$，∴ $m^2-m-2=0$，解得 $m=2$ 或 $m=-1$（舍去），∴ $x_1+x_2=-4$，∴ $(x_1^2+2)(x_2^2+2)=(x_1x_2)^2+2(x_1+x_2)^2-4x_1x_2+4=2^2+2\times(-4)^2-4\times2+4=32$. 故选 B.

5. 3 【解析】∵ $m^2-am+1=0$，$n^2-an+1=0$，∴ $m^2+1=am$，$n^2+1=an$，∴ $(m-1)^2+(n-1)^2=m^2-2m+1+n^2-2n+1=am+an-2m-2n=a(m+n)-2(m+n)=(a-2)(m+n)$. ∵ 实数 m，n 满足 $m^2-am+1=0$，$n^2-an+1=0$，且 $m\neq n$，∴ m，n 可看作关于 x 的一元二次方程 $x^2-ax+1=0$ 的两根，∴ $m+n=a$，∴ $(m-1)^2+(n-1)^2=a(a-2)=a^2-2a=(a-1)^2-1$. ∵ $a\geqslant3$，∴ 当 $a=3$ 时，$(m-1)^2+(n-1)^2$ 有最小值，最小值为 $(3-1)^2-1=3$. 故答案为 3.

6. (1) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$　-1　(2) 1 【解析】(1) ∵ $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 为一元二次方程 $x^2-x+t=0$ 的根，方程

的另外一个根为 β,$\therefore \beta+\alpha=1$,$\therefore \beta=1-\alpha=1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,$\therefore t=\alpha\cdot\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-1$.

故答案为 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,-1.(2)$\because \alpha,\beta$ 是一元二次方程 $x^2-x-1=0$ 的根,$\therefore \alpha^2-\alpha-1=0,\beta^2-\beta-1=0$,$\therefore \alpha^2-\alpha=1,\beta^2-\beta=1$. $\because \alpha\neq0,\beta\neq0$,$\therefore \alpha^3-\alpha^2=\alpha,\beta^3-\beta^2=\beta$,$\therefore (\alpha^3-\alpha^2+1)(\beta^3-\beta^2+1)=(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1$. $\because \alpha+\beta=1,\alpha\beta=-1$,$\therefore$ 原式 $=-1+1+1=1$.

7. (1)【证明】$\because x^2-(k-1)x-k-1=0$,$\therefore \Delta=[-(k-1)]^2-4(-k-1)=k^2+2k+5=(k+1)^2+4>0$,$\therefore$ 无论 k 取何值,方程总有两个不相等的实数根.

(2)【解】不存在,理由:假设存在这样的 k 值,使方程的两根的平方和为 2. 根据根与系数的关系得 $x_1+x_2=k-1$,$x_1\cdot x_2=-k-1$,则 $x_1{}^2+x_2{}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=(k-1)^2-2(-k-1)=2$,$\therefore k^2+1=0$,方程无实数解,$\therefore$ 不存在这样的 k 值,使方程的两根的平方和为 2.

刷素养

8.【解】(1)$x^4-5x^2+6=0$,设 $y=x^2$,则原方程可化为 $y^2-5y+6=0$,解得 $y_1=2,y_2=3$. 当 $y=2$ 时,$x^2=2$,解得 $x_1=\sqrt{2},x_2=-\sqrt{2}$;当 $y=3$ 时,$x^2=3$,解得 $x_1=\sqrt{3},x_2=-\sqrt{3}$,$\therefore$ 原方程的解为 $x_1=\sqrt{2},x_2=-\sqrt{2},x_3=\sqrt{3},x_4=-\sqrt{3}$. 故答案为 $x_1=\sqrt{2},x_2=-\sqrt{2},x_3=\sqrt{3},x_4=-\sqrt{3}$.

(2)$\because$ 实数 a,b 满足 $2a^4-7a^2+1=0,2b^4-7b^2+1=0$ 且 $a\neq b$. 当 $a=-b$ 时,$a^2=b^2$,解关于 a^2 的一元二次方程 $2a^4-7a^2+1=0$ 得 $a^2=\frac{7\pm\sqrt{41}}{4}$,$\therefore a^4+b^4=2a^4=7a^2-1=\frac{45\pm7\sqrt{41}}{4}$;当 $a\neq-b$ 时,a^2,b^2 可看作方程 $2x^2-7x+1=0$ 的两个不相等的实数根,$\therefore a^2+b^2=\frac{7}{2},a^2b^2=\frac{1}{2}$,

$\therefore a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}=\frac{45}{4}$.

综上所述,a^4+b^4 的值为 $\frac{45\pm7\sqrt{41}}{4}$ 或 $\frac{45}{4}$.

关键点拨

(1)利用换元法解方程,设 $y=x^2$,则原方程可化为 $y^2-5y+6=0$,解关于 y 的方程得到 $y_1=2,y_2=3$,则 $x^2=2$ 或 $x^2=3$,然后分别解两个一元二次方程即可.

专题 1 一元二次方程的解法

刷难关

1.【解】$\because 7(x-4)^2=28$,$\therefore (x-4)^2=4$,则 $x-4=2$ 或 $x-4=-2$,解得 $x_1=6,x_2=2$.

2.【解】$[(x-1)-5][(x-1)+1]=0$,$(x-6)x=0$,$\therefore x-6=0$ 或 $x=0$,解得 $x_1=6,x_2=0$.

3.【解】原方程变形为 $(2x-5)(x+1)=0$,所以 $2x-5=0$ 或 $x+1=0$,所以 $x_1=\frac{5}{2},x_2=-1$.

4.【解】移项,得 $x^2-6x=-4$,等式的两边同时加上一次项系数的一半的平方,得 $x^2-6x+9=-4+9$,即 $(x-3)^2=5$,$\therefore x=\pm\sqrt{5}+3$,$\therefore x_1=\sqrt{5}+3,x_2=-\sqrt{5}+3$.

5.【解】$\because x^2-2x-4=0,a=1,b=-2,c=-4$,$\therefore \Delta=(-2)^2-4\times1\times(-4)=20$,$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{20}}{2\times1}=1\pm\sqrt{5}$,$\therefore x_1=1+\sqrt{5},x_2=1-\sqrt{5}$.

刷有所得 | 一元二次方程的解法

若一元二次方程可化为 $(mx+n)^2=p(m\neq0,p\geqslant0)$ 的形式	宜用直接开平方法
若一元二次方程的二次项系数为 1,一次项系数为偶数	宜用配方法
若一元二次方程整理后右边为 0,且左边能进行因式分解	宜用因式分解法
若用直接开平方法、配方法、因式分解法都不简便	宜用公式法

6.【解】(1)$\because (x^2+y^2+3)(x^2+y^2-3)=27$,$\therefore$ 设 $m=x^2+y^2$,则原方程可转化为 $(m+3)(m-3)=27$,即 $m^2-9=27$,$\therefore m^2=36$,$\therefore m=\pm6$. $\because x^2+y^2\geqslant0$,$\therefore x^2+y^2=6$.

(2)由 $x^2-3|x|+2=0$,得 $|x|^2-3|x|+2=0$. 设 $|x|=t$,则 $t\geqslant0$,$\therefore t^2-3t+2=(t-1)(t-2)=0$,

$\therefore t-1=0$ 或 $t-2=0$,

$\therefore t_1=1,t_2=2$,$\therefore |x|=1$ 或 $|x|=2$,$\therefore x_1=-1,x_2=1,x_3=-2,x_4=2$.

(3)设最小整数为 x,则 $x(x+1)(x+2)(x+3)=120$,即 $(x^2+3x)(x^2+3x+2)=120$. 设 $x^2+3x=y$,则 $y^2+2y-120=0$,$\therefore y_1=-12,y_2=10$. 当 $x^2+3x=-12$ 时,$\Delta=3^2-4\times12=-39<0$,$\therefore$ 此方程无实数解. 当 $x^2+3x=10$ 时,解得 $x_1=2,x_2=-5$,$\therefore$ 这四个连续的整数为 2,3,4,5 或 $-5,-4,-3,-2$.

关键点拨

(3)x^2+3x 的值为 -12 时,原方程无实数解,x^2+3x 的值为 10 时,这四个连续的整数有两种情况.

7.【解】(1)设 $y=2x-5$,则原方程变形为 $y^2-y-2=0$,即 $(y-2)(y+1)=0$,解得 $y_1=2,y_2=-1$. 当 $y=2$ 时,即 $2x-5=2$,解得 $x=3.5$;当 $y=-1$ 时,$2x-5=-1$,解得 $x=2$. 所以原方程的解为 $x_1=3.5,x_2=2$.

(2)$x^2-xy-y^2=0$,方程两边同时除以 y^2,得 $\frac{x^2-xy-y^2}{y^2}=0$. 设 $\frac{x}{y}=m$,则方程可化为 m^2-m-